Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Legyen az ellipszis középpontja az origó (nagytengelye az x – tengellyel, kistengelye az y – tengellyel esik egybe), fókuszpontjai az $F_1\ (-c; 0)$ és $F_2\ (c; 0)$ pontok és nagytengelyének hossza $2a\ (> 2c)$, kistengelyének hossza pedig $2b\ (< 2a)$. Ha $P\ (x; y)$ az ellipszis tetszőleges pontja, akkor a középponti (kanonikus, tengelyponti) egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

<u>Bizonyítás:</u>
Az ellipszis definíciójából a következő adódik: $d\ (P; F_1) + d\ (P; F_2) = 2a$.

Helyettesítsük be az adatokat: $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$.

Ebből a következőt kapjuk: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Mivel mindkét oldal pozitív $\left(2a > d\ (P; F_2)\right)$, így emeljünk négyzetre:

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

Rendezzünk át az egyenletet a következőképpen: $a^2 - cx = a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$.

Mivel mindkét oldal pozitív ($a > c$ és $a \geq |x|$), így emeljünk négyzetre:

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2 \cdot (x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$

Rendezzünk át az egyenletet a következőképpen: $x^2 \cdot (a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2 \cdot (a^2 - c^2)$.

Mivel $a^2 = b^2 + c^2$, így ebből a következő adódik: $b^2 = a^2 - c^2$.

Ezt az egyenletbe helyettesítve a következőt kapjuk: $a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$.

Ebből rendezés után adódik a bizonyítandó állítás: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

■

TÉTEL:
Legyen a hiperbola középpontja az origó (valósengelye az x – tengellyel, képzetes tengelye az y – tengellyel esik egybe), fókuszpontjai az $F_1\ (-c; 0)$ és $F_2\ (c; 0)$ pontok és valóstengelyének hossza $2a\ (< 2c)$, kistengelyének hossza pedig $2b$. Ha $P\ (x; y)$ a hiperbola tetszőleges pontja, akkor a középponti (kanonikus, tengelyponti) egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Bizonyítás:
Az ellipszis definíciójából a következő adódik: $|d\ (P; F_1) - d\ (P; F_2)| = 2a$.

Helyettesítsük be az adatokat: $\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$.

Ebből a következőt kapjuk: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Amennyiben a P pont a hiperbola jobb oldali ágára illeszkedik, akkor az egyenlet jobb oldalán $+2a$, ha a baloldali ágán helyezkedik el, akkor $-2a$ szerepel. Ez utóbbi esetben $d\ (P; F_2) > 2a$ adódik, tehát mindkét esetben mindkét oldal pozitív, így emeljünk négyzetre:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Rendezzünk át az egyenletet a következőképpen: $cx - a^2 = \pm a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$.

Mivel $c > a$ és $|x| \geq a$, így $|cx| > a^2$, vagyis az egyenlet mindkét oldala, attól függően, hogy a P pont a hiperbola melyik ágára illeszkedik, egyszerre lesz pozitív, illetve negatív, így emeljünk négyzetre:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2 \cdot (x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

Rendezzünk át az egyenletet a következőképpen: $x^2 \cdot (a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2 \cdot (a^2 - c^2)$.

Mivel $c^2 = a^2 + b^2$, így ebből a következő adódik: $-b^2 = a^2 - c^2$.

Ezt az egyenletbe helyettesítve a következőt kapjuk: $-x^2b^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$.

Ebből rendezés után adódik a bizonyítandó állítás: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

■