Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Legyen a p paraméterű parabola tengelye az y – tengely, tengelypontja az origó, fókuszpontja pedig illeszkedjen az y - tengely pozitív felére. Ekkor fókuszpontja az $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ pont és vezéregyenese az $y = -\frac{p}{2}$ egyenletű egyenes. Ha $P\ (x; y)$ a parabola tetszőleges pontja, akkor a parabola egyenlete: $y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$.

Bizonyítás:
A parabola definíciójából a következő adódik: $d\ (P; F) = d\ (P; v)$.

Helyettesítsük be az adatokat: $\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y - \left(-\frac{p}{2}\right)$.

Ebből a következőt kapjuk: $\sqrt{x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}} = y + \frac{p}{2}$.

Mivel mindkét oldal pozitív (távolságok), így emeljünk négyzetre:

$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$.

Ebből rendezés után adódik a bizonyítandó állítás: $y = \frac{1}{2p} x^2$.

■

TÉTEL:
Legyen a p paraméterű, y – tengellyel párhuzamos tengelyű, „fölfelé nyíló” parabola tengelypontja a $T\ (u; v)$ pont. Ekkor fókuszpontja az $F\left(u; v + \frac{p}{2}\right)$ pont és vezéregyenese az $y = v - \frac{p}{2}$ egyenletű egyenes. Ha $P\ (x; y)$ a parabola tetszőleges pontja, akkor a parabola egyenlete: $y - v = \frac{1}{2p} \cdot (x-u)^2$.

Bizonyítás:
A parabola definíciójából a következő adódik: $d\ (P; F) = d\ (P; v)$.

Helyettesítsük be az adatokat: $\sqrt{(x-u)^2 + \left(y - \left(v + \frac{p}{2}\right)\right)^2} = y - \left(v - \frac{p}{2}\right)$.

Ebből a következőt kapjuk: $\sqrt{(x-u)^2 + y^2 - 2y\left(v + \frac{p}{2}\right) + \left(v + \frac{p}{2}\right)^2} = y - \left(v - \frac{p}{2}\right)$.

Mivel mindkét oldal pozitív (távolságok), így emeljünk négyzetre:

$(x-u)^2 + y^2 - 2y\left(v + \frac{p}{2}\right) + \left(v + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 - 2y\left(v - \frac{p}{2}\right) + \left(v - \frac{p}{2}\right)^2$.

Ebből rendezés után adódik a bizonyítandó állítás: $y - v = \frac{1}{2p} \cdot (x-u)^2$.

■

TÉTEL:
Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja az y – tengellyel párhuzamos tengelyű, $T\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ tengelypontú, $\frac{1}{2a}$ paraméterű parabola ($a > 0$).

Bizonyítás:
Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát teljes négyzetté kiegészítéssel:

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Ebből adódik, hogy a függvény képe megkapható az $y = ax^2$ egyenletű ponthalmaz $\vec{v}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ vektorral való eltolásával.

Ekkor felírhatjuk a következőt: $y + \frac{b^2-4ac}{4a} = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Ezt összehasonlítva a $T\,(u; v)$ tengelypontú, p paraméterű, felfele nyíló parabola $y - v = \frac{1}{2p} \cdot (x-u)^2$egyenletével, adódik a bizonyítandó állítás.

Amennyiben $a < 0$, hasonlóan adódik a bizonyítás, csak a paraméter $-\frac{1}{2a}$ lesz.

■