Tömegközéppontok koordinátái

A koordináta – geometria témaköre geometriai problémákat old meg algebrai módszerekkel úgy, hogy a geometriai fogalmaknak algebrai fogalmakat feleltet meg: a pontokat, vektorokat rendezett számpárral (koordinátákkal), a vonalakat pedig egyenlettel jellemezzük.

Megjegyzés:

- *Egy vektor koordinátái megegyeznek az origó kezdőpontú reprezentánsa végpontjának koordinátáival, vagyis egy pont és a pont helyvektorának koordinátái megegyeznek.*
- *A koordináta – rendszer x - tengelyét abszcisszatengelynek, az y - tengelyét ordináta tengelynek nevezzük.*
- *Egy adott pont első koordinátáját a pont abszcisszájának, a második koordinátáját a pont ordinátájának nevezzük.*
- *A koordináta – rendszer kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesít a sík pontjai és a rendezett számpárok között.*

TÉTEL:
Az $A\,(a_1;\, a_2)$ és $B\,(b_1;\, b_2)$ pontok távolsága, vagyis az AB szakasz, illetve az AB vektor hossza: $d_{AB} = |AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

TÉTEL:
Az $A\,(a_1;\, a_2)$ és $B\,(b_1;\, b_2)$ pontokkal megadott szakasz $F\,(f_1; f_2)$ felezőpontjának koordinátái egyenlők a megfelelő koordináták összegének felével: $f_1 = \frac{a_1 + b_2}{2}$ és $f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

TÉTEL:
Az $A\,(a_1;\, a_2)$ és $B\,(b_1;\, b_2)$ pontokkal megadott szakasz A – hoz közelebbi $H_1\,(x_1; y_1)$ harmadoló pontjának koordinátái: $x_1 = \frac{2a_1 + b_1}{3}$ és $y_1 = \frac{2a_2 + b_2}{3}$.

Az $A\,(a_1;\, a_2)$ és $B\,(b_1;\, b_2)$ pontokkal megadott szakasz B – hez közelebbi $H_2\,(x_2; y_2)$ harmadoló pontjának koordinátái: $x_2 = \frac{a_1 + 2b_1}{3}$ és $y_2 = \frac{a_2 + 2b_2}{3}$.

TÉTEL:
Az $A\ (a_1;\ a_2)$ és $B\ (b_1;\ b_2)$ pontokkal megadott szakaszt $m : n$ arányban osztó $P\ (p_1; p_2)$ pont koordinátái: $p_1 = \frac{n \cdot a_1 + m \cdot b_1}{m + n}$ és $p_2 = \frac{n \cdot a_2 + m \cdot b_2}{m + n}$.

Megjegyzés:

- *Ha $m = n = 1$, akkor P pont a szakasz felezőpontja.*
- *Ha $m = 1$ és $n = 2$, vagy $m = 2$ és $n = 1$, akkor a P pont a szakasz harmadoló pontja.*

TÉTEL:
Az $A\ (a_1;\ a_2)$, $B\ (b_1;\ b_2)$ és $C\ (c_1;\ c_2)$ csúcspontú háromszög $S\ (s_1;\ s_2)$ súlypontjának koordinátái: $s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$ és $s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$.

TÉTEL:
Az $A\ (a_1;\ a_2)$, $B\ (b_1;\ b_2)$, $C\ (c_1;\ c_2)$ és $D\ (d_1;\ d_2)$ csúcspontú négyszög $S\ (s_1;\ s_2)$ súlypontjának koordinátái: $s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}$ és $s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}$.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Forgasd el a $P\ (10; 7)$ pontot az origó körül $+90°$, illetve $-90°$ - kal! Írd fel az elforgatott pontok korordinátáit!**

2. **(K) Határozd meg az $A\ (-1; 1), B\ (0; -3), C\ \left(\frac{7}{2}; 4\right)$ és a $D\ (d_1; d_2)$ pontoknak az**

   a) **x - tengelyre vonatkozó tükörképét;**

   b) **az x - tengelyre eső merőleges vetületét;**

   c) **y - tengelyre vonatkozó tükörképét;**

   d) **az y - tengelyre eső merőleges vetületét;**

   e) **az origóra vonatkozó tükörképét!**

3. **(K) Adott az első síknegyedben a $P\ (a; b)$ pont. Tükrözd a P pontot sorra az alábbi megadott egyenesekre, illetve pontra úgy, hogy mindig a kapott tükörképpontot kell tovább tükrözni! Állapítsd meg a kapott pontok koordinátáit!**

   A: az x – tengelyre **B: az origóra**

   C: az $y = x$ egyenesre **D: az $x = 3$ egyenesre**

4. **(K) Milyen alakzaton találhatók azok a pontok, amelyek az x – tengelytől, illetve az y – tengelytől 3 egység távolságra helyezkednek el? Mit tudunk mondani az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáiról?**

5. **(K) Milyen alakzaton találhatók azok a pontok, amelyek a két koordinátatengelytől ugyanakkora távolságra helyezkednek el? Mit tudunk mondani az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáiról?**

6. (K) Számítsd ki a következő pontok origótól való távolságát! $(a, b \in \mathbb{R})$

$A\,(2; 2)$ $B\,(0; -3)$ $C\,(-3; -4)$ $D\,(5; -12)$

$E\,\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ $F\,\left(-\frac{1}{2}; 6\frac{1}{4}\right)$ $G\,(a; -a)$ $H\,(a+b; a-b)$

7. (E) Számítsd ki a következő pontok origótól való távolságát!

$A\,(-\sqrt{7}; -3)$ $B\,(9; \sqrt{13})$ $C\,(\sqrt{6}; -2\cdot\sqrt{3})$ $D\,(\sqrt{2}; \sqrt{7})$

$E\,\left(\frac{\sqrt{3}}{4}; -\frac{5\cdot\sqrt{2}}{6}\right)$ $F\,\left(-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ $G\,\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ $H\,\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}; \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

8. (K) Határozd meg a szakasz hosszát, ha a végpontok koordinátái a következők!

$A\,(-1; 3)$ és $B\,(5; 2)$ $C\,(0; 1)$ és $D\,(3; 2)$ $E\,(-2; -5)$ és $F\,(7; -10)$

$G\,\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{3}\right)$ és $H\,\left(-\frac{7}{6}; -4\right)$ $I\,\left(1\frac{3}{4}; -8\right)$ és $J\,\left(-2\frac{1}{4}; 9\right)$ $K\,(2008; 2010)$ és $L\,(2013; 2022)$

$P\,(-3; 0,5)$ és $Q\,\left(5; 6\frac{1}{2}\right)$ $X\,(2; 6)$ és $Y\,(8; 9)$ $Z\,(0; -3)$ és $W\,(-3; -7)$

9. (E) Határozd meg a szakasz hosszát, ha a végpontok koordinátái a következők!

$A\,(1; 1)$ és $B\,(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ $C\,(\sqrt{3}; \sqrt{6})$ és $D\,(\sqrt{2}; -1)$ $E\,(-\sqrt{8}; \sqrt{3})$ és $F\,(\sqrt{2}; -\sqrt{12})$

$G\,(-2\cdot\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ és $H\,(3\cdot\sqrt{2}; \sqrt{32})$ $P\,\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ és $Q\,\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

10. (K) Az alábbi pontokról számításokkal döntsd el, hogy melyek illeszkednek az $O\,(-5; -1)$ középpontú, 13 sugarú körre!

$A\,(0; 11)$ $B\,(-17; 4)$ $C\,(6; -5)$ $D\,(7; -6)$ $E\,(-10; -13)$

11. (K) Adott az $A\,(2; 5)$ pont. Keress a koordináta – rendszerben olyan pontokat, amelyeknek az *A* ponttól való távolsága a következő! Mennyi ilyen pont van?

2 egység **1 egység** **$\sqrt{2}$ egység** **0 egység**

12. (K) Egy kör középpontja a $K\ (0; -13)$ pont és érinti az x tengelyt. Áthalad – e a kör a $P_1\ (11; -6)$ és a $P_2\ (-5; -1)$ pontokon?

13. (K) Határozd meg a kör középpontjának koordinátáit, ha a kör áthalad a $P\ (-4; 2)$ ponton és az x - tengelyt az $E\ (2; 0)$ pontban érinti!

14. (K) Határozd meg a kör középpontjának koordinátáit, ha áthalad a $P\ (4; 2)$ koordinátájú ponton és mindkét koordinátatengelyt érinti!

15. (K) Határozd meg azt a P pontot az abszcisszatengelyen, amelynek az $A\ (3; 1)$ ponttól való távolsága 5 egység!

16. (K) Határozd meg azt a Q pontot az ordinátatengelyen, amelynek a $B\ (3; -2)$ ponttól való távolsága 4 egység!

17. (K) Határozd meg azt a P pontot, amelynek ordinátája háromszorosa az abszcisszájának, továbbá az $A\ (2; 7)$ ponttól való távolsága $\sqrt{29}$ egység!

18. (K) Határozd meg azt az A pontot, amelynek abszcisszája öttel kisebb, mint az ordinátája, továbbá a $P\ (-3; 4)$ ponttól való távolsága $\sqrt{20}$ egység!

19. (K) Határozd meg az x - tengely azon pontjának koordinátáit, amely egyenlő távol van az origótól és a $(9; -3)$ ponttól!

20. (K) Határozd meg az y - tengelynek azt a P pontját, amely az $A\ (2; 1)$ és a $B\ (6; 5)$ koordinátájú pontoktól egyenlő távolságra van!

21. (K) A $P\ (x; y)$ pont ugyanolyan távolságra van az $A\ (3; 1)$ ponttól, mint a $B\ (-2; 5)$ ponttól. Milyen algebrai összefüggés van a P pont x és y koordinátái között?

22. (K) Egy koordináta – rendszerben adott az $A\ (5; 3)$ és a $B\ (9; 7)$ pont. Add meg azt a pontot, amely A – tól és B – től egyaránt 4 egységnyire van!

23. (E) Egy négyzet két szemközti csúcsa $A\ (-2; -1)$ és $C\ (1; 8)$. Milyen hosszúságú a négyzet oldala?

24. (K) Bizonyítsd be, hogy ha a $P\ (x; y)$ pont az $O\ (2; -1)$ ponttól 5 egység távolságra található, akkor a P pont koordinátáira teljesül, hogy $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

25. (K) Igazold, hogy az $A\ (-2; -4), B\ (5; -3), C\ (-1; 3)$ pontok egy egyenlő szárú háromszög csúcsai! Számítsd ki a háromszög területét!

26. (K) Egy négyszög csúcsainak koordinátái $A(3; -6), B(11; -1), C(8; 4), D(3; 3)$. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra! Számítsd ki a négyszög területét!

27. (K) Bizonyítsd be, hogy a $(6; 2), (13; 1), (12; -6), (1; -8)$ pontok egy deltoid csúcsai! Számítsd ki a deltoid területét!

28. (K) Mekkora az $A\ (3; 5), B\ (6; 7), C\ (-1; 10)$ pontok által meghatározott háromszög leghosszabb magassága?

29. (K) Határozd meg az $A\ (-3; -3), B\ (-5; 7)$ és $C\ (3; 4)$ csúcsokkal rendelkező háromszög szögeit, kerületét és területét!

30. (E) Határozd meg a következő csúcsával adott háromszög kerületét!

$$A\left(-\sqrt{2}; 0\right), B\left(0; \sqrt{2}\right), C\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$$

31. (K) Számítsd ki a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát, ha a csúcsainak koordinátái: $A\ (0; 2), B\ (1; 1)$ és $C\ (2; -2)$!

32. (E) Egy szabályos háromszög két csúcsa $A\,(-3;5)$ és $B\,(-4;7)$. Számítsd ki a háromszög oldalának és magasságának hosszát, valamint a területét!

33. (E) Egy deltoid három csúcsának koordinátái: $A\,(8;5), B\,(5;6)$ és $C\,(2;2)$, a szimmetriatengelye az AC egyenes. Számítsd ki a deltoid negyeidk csúcsának koordinátáit! Mekkora a deltoid területe?

34. (E) Határozd meg annak a körnek a sugarát, amelynek középpontja a $C\,(3;1)$ pont és a 6 hosszúságegységnyi húrját a $P\,(6;5)$ pont felezi!

35. (E) Egy háromszög csúcsai: $A\,(1;8), B\,(13;4), C\,(7;10)$. Legfeljebb mekkora sugarú kör helyezhető el a háromszögben, ha a körnek nem lehet a háromszögön kívül pontja?

36. (K) Magyarország $1:1100\,000$ méretarányú térképén elhelyezünk egy koordináta – rendszert, amelynek tengelyei észak – dél, illetve kelet – nyugat irányúak, a tengelyeken az egységek pedig $1\,cm$ hosszúak. Az így kapott koordináta – rendszerben néhány város koordinátái a következőképpen alakulnak: Veszprém $(-7;1)$, Győr $(-8;7)$, Szeged $(8;-7)$, Debrecen $(18;5)$. Számítsd ki, hogy a felsorolt városok páronként hány kilométer távolságra van egymástól! Melyik magyarországi városban lehet a koordináta – rendszer kezdőpontja?

37. (K) Egy repülőjárat az $A\,(-5;-1)$ pontból indul, egyenesen repül a $B\,(-1;2)$ leszállóhelyig, innen pedig egyenesen a $C\,(11;7)$ pontig.

***a)* Döntsd el, hogy változott – e a repülés iránya a B pontban történt felszállást követően!**

***b)* Ha változott a repülési irány, akkor hány fokkal tért el az eredeti iránytól a gép, miután a B – ből felszállt?**

***c)* Hány egységnyi utat tett meg a gép összesen?**

38. (E) Zoli egy erdőt örökölt, amely jó közelítéssel nyolcszög alakú. Az $1:5000$ méretarányú térképszelvényen elhelyezett derékszögű koordináta – rendszerben az erdőterület csúcsainak koordinátái: $(0;0), (8;1), (13;3), (14;5), (8;10), (0;9), (-5;7), (-6;5)$. Számítsd ki, hogy hány hektár erdőt örökölt Zoli, ha a koordináta – rendszer egységei $1\,cm$ hosszúak. Az eredményt egész hektárra kerekítve add meg! Rendelkezik – e az erdő valamilyen szimmetriatulajdonsággal?

39. (E) Egy fiú háromszög alakú kitűzőt szeretne készíteni kartonból. Tervei megvalósítása érdekében négyzetrácsos kartonból kivágott egy háromszöget. A háromszög csúcsainak koordinátái a négyzetrácsra rajzolt koordináta – rendszerben (melyben az egység $1\ cm$): $A\ (-3; 5), B\ (5; 1)$ és $C\ (-6; -5)$.

a) **Számítsd ki a kivágott háromszög területét!**

b) **A kivágott ABC háromszög melyik oldalára állítva lesz a legmagasabb?**

c) **Mekkora az ehhez az oldalhoz tartozó legnagyobb magasság?**

d) **A fiú az ABC háromszög legnagyobb magasságát három egyenlő részre osztotta, majd az osztópontokon át párhuzamosokat húzott a háromszög megfelelő oldalával; így az ABC háromszöget egy kisebb háromszögre, valamint két trapézra osztotta. A középső részt fehéren hagyta, a kis háromszöget pirosra, a nagyobb trapézt zöldre satírozta. Mekkora területű részt satírozott pirosra, illetve zöldre?**

40. (E) Egy bútoráruház olyan háromszöglappal rendelkező asztalokat árusít, amelynek oldalait egy – egy körszelet alakú toldalékkal kiegészítve pontosan kör alakú asztalhoz juthatunk. A tervező a gyártónak elküldte a háromszöglap kicsinyített képének koordinátáit: $(0; 0), (3; 0), (2; 2)$ (egy egység hossza a valóságban $50\ cm$). A számításokat egy tizedes pontossággal elvégezve válaszolj a következő kérdésekre.

a) **Mekkorák a háromszöglap oldalai a valóságban?**

b) **Hány centiméter a kerek asztal sugara?**

c) **Mekkora a magassága az asztal leghosszabb oldalához illeszthető körszelet alakú toldaléknak?**

d) **Legfeljebb mekkora sugarú kör alakú abrosz helyezhető el a háromszöglapú asztalon, ha az asztalról sehol nem lóghat le?**

41. (E) Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszöget az AC átlója két egyenlő területű háromszögre bontja, ha $A\ (-2; -2), B\ (3; -1), C\ (8; 3)$ és $D\ (5; 3)$!

42. (K) Határozd meg a szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha a szakasz végpontjai a következő pontok!

$A\ (-5; 7)$ **és** $B\ (1; -13)$ $\qquad$ $C\ (0; -1,6)$ **és** $D\ (2,8; 4)$ $\qquad$ $E\ \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$ **és** $F\ \left(-2; \frac{2}{3}\right)$

43. (E) Határozd meg a szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha a szakasz végpontjai a következő pontok! (a; b; c és d különböző pozitív számok)

$A\left(1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$ **és** $B\left(-\frac{2}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{8}}{2}\right)$ $\qquad$ $C\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$ **és** $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$E\left((a+b)^2;\frac{1}{a+b}\right)$ **és** $F\left((a-b)^2;\frac{1}{a-b}\right)$ $\qquad$ $P\left(\frac{a-b}{2};\frac{c-d}{2}\right)$ **és** $Q\left(\frac{a+b}{2};\frac{c+d}{2}\right)$

44. (K) Határozd meg az $A\,(-2;1)$ és $B\,(4;5)$ pontok által meghatározott szakasz súlypontját!

45. (K) Egy kör átmérőjének végpontjai: $A\,(2;-3)$ és $B\,(-4,-7)$. Határozd meg a kör középpontjának koordinátáit!

46. (K) Határozd meg az A pont koordinátáit, ha ismertek a B pontnak, valamint az AB szakasz F felezőpontjának koordinátái! (e és f valós számok)

a) $B\,(2;3)$ **és** $F\,(-1;4)$

b) $B\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$ **és** $F\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

c) $B\,(1;4)$ **és** $F\,(e;f)$

47. (K) Egy koordináta – rendszerben adott az $A\,(2;6)$ és $B\,(-3;2)$ pont. Add meg a szakasz felezőpontjának koordinátáit! Add meg azt a pontot, amely A – tól és B – től egyaránt 5 egységnyire van!

48. (K) Adottak az $A\,(1;2)$ és a $B\,(5;1)$ pontok.

a) **Tükrözd az A pontot a B pontra!**

b) **Tükrözd a B pontot az A pontra!**

c) **Tükrözd az A pontot az AB szakasz felezőpontjára!**

d) **Tükrözd a B pontot az AB szakasz felezőpontjára!**

e) **Tükrözd az A és a B pontot az origóra! Az így kapott négy pont milyen négyszöget határoz meg?**

49. (K) Az $A\,(-4;7)$ pontot tükrözzük az origóra, illetve a $B\,(5;-2)$ koordinátájú pontra. Írd fel a tükörkép koordinátáit az egyes esetekben!

50. (K) Az $A\,(-2;-1)$ és $B\,(3;2)$ pontok által meghatározott szakaszt mindkét végponton túl meghosszabbítjuk a saját hosszával! Határozd meg a végpontok koordinátáit!

51. (K) Adottak az $A\,(-2;5)$ és a $B\,(4;-1)$ pontok. Az AB szakaszt mindkét végpontján túl hosszabbítsuk meg az AB szakasz felével. Add meg az így kapott végpontok koordinátáit!

52. (K) Egy háromszög csúcsai: $A\,(1;4), B\,(-3;10), C(-3;4)$. Számítsd ki a B csúcsra illeszkedő súlyvonal, illetve a háromszög köré írt kör sugarának hosszát!

53. (K) Számítsd ki az $A\,(1;2), B\,(8;6), C(3;-5)$ csúcsokkal adott háromszögben az $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ súlyvonalvektorok koordinátáit!

54. (K) Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A\,(2;7), B\,(1;1), C\,(3;6)$. Számítsd ki az oldalak felezőpontjainak koordinátáit. Igazold, hogy két felezőpontot összekötő vektor párhuzamos a szemközti oldal vektorával!

55. (K) Adott egy háromszög oldalfelező pontjai: $F_{AB}\,(-2;-2), F_{AC}\,(5;1)$ és $F_{BC}\,(3;4)$. Határozd meg a háromszög csúcsainak koordinátáit!

56. (K) Az $A\,(-3;-1), B\,(6,-2), C\,(3;4)$ és $D\,(0;4)$ pontok ebben a sorrendben egy négyszög csúcsai. Milyen négyszöget határoznak meg a négyszög oldalainak felezőpontjai?

57. (K) Az $A\,(-3;-1), B\,(6,-2), C\,(3;4), D\,(0;4)$ és $E\left(-\frac{3}{2};2\right)$ pontok ebben a sorrendben egy ötszög csúcsai. Az AB, BC, CD, DE oldalak felezőpontjai rendre M, N, P és Q. Az MP és NQ szakaszok felezőpontjai R és S. Add meg az $\overrightarrow{RS}$ és $\overrightarrow{EA}$ vektorok koordinátáit!

58. (K) Egy négyszög csúcsainak koordinátái: $A\,(-2;-1), B\,(12;-5), C\,(6;9), D\,(-1;5)$. Határozd meg az átlók felezőpontjait összekötő vektor koordinátáit!

59. (K) Az $ABCD$ négyszög csúcsai $A\,(-6;-2), B\,(5;-1), C\,(6;4)$ és $D\,(3;6)$. Számítsd ki a négyszög mindkét középvonala esetén a felezőpont koordinátáit! Mit tapasztalsz?

60. (E) Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD oldalának felezőpontja rendre: $E\,(-3;1), F\,(2;-2), G\,(3;2)$. Számítsd ki az AD oldal felezőpontjának koordinátáit! Milyen négyszöget alkot a négy oldalfelező pont?

61. (K) Egy négyzet két szomszédos csúcsa $A\,(1;4)$ és $B\,(5;2)$. Számítsd ki a CD oldal felezőpontjának koordinátáit!

62. (K) Egy téglalap két csúcsa $A\,(-3;3)$ és $B\,(2;3)$. Átlói metszéspontjának ordinátája 0. Határozd meg a hiányzó csúcsok koordinátáit, és számítsd ki a téglalap területét!

63. (K) Egy téglalap két szomszédos csúcsa $A\,(1;-3)$ és $B\,(7;7)$. A másik oldal fele olyan hosszú, mint AB. Határozd meg az átlók metszéspontját!

64. (K) Adott egy paralelogramma $A\,(0;5)$ és $B\,(-1;1)$ csúcsa, továbbá az átlók $M\,(2;3)$ metszéspontja. Számítsd ki a paralelogramma hiányzó csúcsinak koordinátáit!

65. (K) Adott egy paralelogramma $(-2;2), (2;-3)$ és $(-5;-4)$ csúcsa. Határozd meg a negyedik csúcs koordinátáit! Mennyi megoldás van? Add meg az átlók metszéspontjának koordinátáit!

66. (E) Adott három pont: $A\left(-\sqrt{20};-\sqrt{128}\right), B\left(\sqrt{45};-\sqrt{8}\right)$ és $C\left(-\sqrt{5};\sqrt{50}\right)$. Határozd meg a D pont koordinátáit úgy, hogy a négy pont egy paralelogramma csúcspontjai legyenek!

67. (K) Igazold, hogy az $A\left(\frac{2}{5};-\frac{4}{7}\right), B\left(\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right), C\left(-\frac{7}{2};\frac{19}{5}\right)$ és $D\left(-\frac{23}{5};\frac{17}{7}\right)$ pontok paralelogrammát határoznak meg!

68. (K) Egy paralelogramma középpontja $K\,(0;2)$, két szomszédos oldalának felezőpontja $F\,(2;4)$, $G\,(0;6)$. Számítsd ki a csúcspontjainak koordinátáit!

69. (K) A koordináta – rendszer O kezdőpontjának tükörképe az $A\,(5;5)$ pontra O_1, az O_1 tükörképe a B pontra O_2, az O_2 tükörképe a $C\,(1;7)$ pontra ismét az O. Számítsd ki a B pont koordinátáit, és bizonytasd be, hogy az $OABC$ négyszög rombusz!

70. (K) Peti a koordináta – rendszerben megszerkesztette az $ABCD$ négyszöget, melynek csúcsai a következő pontok: $A\,(-2;-5), B\,(4;-3), C\,(2;5), D\,(-1;3)$. Ezután tükrözte az $ABCD$ négyszöget a BC oldal felezőpontjára. Mik a koordinátái a tükörképként keletkező négyszög csúcsainak? Bizonyítsd be, hogy a két négyszög egyesítésével előálló hatszög szemközti oldalai párhuzamosak!

71. (K) Egy egyenlő szárú háromszög alapjának csúcsai az $A\,(2;1)$ és a $B\,(6;5)$ koordinátájú pontok. A harmadik C csúcsa az x - tengelyen van. Mekkora a háromszög területe?

72. (K) Az $A\,(0;0), B\,(3;6), C\,(8;-2)$ csúcsokkal megadott háromszöget az A pontból kétszeresére nagyítjuk. Számítsd ki a kapott $A'B'C'$ háromszög B' és C' csúcsainak koordinátáit!

73. (K) Egy háromszög csúcspontjai $A\,(-1;-1), B\,(3;-2)$ és $C\,(5;4)$. Nagyítsuk a háromszöget az AB oldal felezőpontjából a kétszeresére! Írd fel a kapott háromszög csúcspontjainak koordinátáit!

74. (E) Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: $(2;1)$ és $(-4;3)$. Számítsd ki a harmadik csúcs koordinátáit!

75. (E) Az ABC egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójának két végpontja $A\,(4;2)$ és $B\,(8;4)$. Határozd meg a C csúcs koordinátáit!

76. (E) Add meg az egyenlőszárú derékszögű háromszög harmadik csúcsát, ha két csúcspontja $(-4;3)$ és $(4;-3)$!

77. (E) Egy szakasz két végpontja $A\,(-2;-1)$ és $B\,(6;-9)$. Mi lehet az AB szakaszra rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsa?

78. (E) Adott az $A\,(3;4)$ és $B\,(6;1)$ pontok által meghatározott szakasz. Számítsd ki az A - hoz, illetve B - hez közelebbi harmadoló pontok koordinátáit!

79. (E) Számítsd ki a végpontjainak koordinátáival adott szakasz negyedelőpontjainak koordinátáit: $A\,(-3;-8)$ és $B\,(9;10)$!

80. (E) Határozd meg az $A\,(-2;3)$ és $B\,(1;-1)$ pontok által meghatározott szakasz hosszát, felezőpontjának, illetve harmadolópontjainak koordinátáit!

81. (E) Adott az $A\,(3;5)$ és $B\,(9;2)$ pont. Az AB szakaszt öt egyenlő részre osztjuk. Számítsd ki az osztópontok koordinátáit!

82. (E) Osszd fel az $A\,(3;-2)$ és $B\,(10;12)$ pontokat összekötő szakaszt $2:5$, illetve $5:2$ arányban!

83. (E) Számítsd ki az $A\,(4;-1)$ és $B\,(-2;6)$ pontok által meghatározott szakasz $P\,(x;y)$ pontjának koordinátáit, ha $AP = 2 \cdot PB$!

84. (E) Írd fel az $A\,(10;-11)$ és $B\,(-8;7)$ pontok által meghatározott szakasz azon P pontjának koordinátáit, amelyre $\frac{AP}{PB} = 9$!

85. (E) Írd fel az $A\,(-6;3)$ és $B\,(5;-4)$ pontok által meghatározott szakasz azon P pontjának koordinátáit, amelyre $AP : PB = 5 : 2$!

86. (E) Írd fel az $A\,(-35;2)$ és $B\,(16;-11)$ pontok által meghatározott szakasz azon P pontjának koordinátáit, amelyre $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$!

87. (E) Adott az $A\ (2; -7)$ és a $B\ (6; 5)$ pont. Határozd meg az AB egyenesén azt a P pontot, melyre $\frac{AP}{PB} = \frac{7}{4}$ teljesül!

88. (E) Adott az $A\ (-19; 21)$ és a $B\ (32; -15)$ pont. Határozd meg az AB egyenesén azt a P pontot, melyre $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$ teljesül!

89. (E) Adott az $A\ (-2; -1), B\ (6; -9)$ és $C\ (1; 3)$ pont.

***a)* Mely pontok osztják $3:5$ arányban az AB szakaszt?**

***b)* Mik a CB oldalra kívülről rajzolt négyzet további csúcsai?**

90. (E) Írd fel az AB szakasz B végpontjának koordinátáit, ha $A\ (-3; 0)$, továbbá $AP : PB = 2 : 3$ és $P\ (1; -2)$!

91. (E) Írd fel az AB szakasz B végpontjának koordinátáit, ha ismertek az A pont, valamint az AB szakasz A – hoz közelebbi H harmadolópontjának koordinátái: $A\ (-6; -2)$ és $H\ \left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$!

92. (E) Írd fel az AB szakasz B végpontjának koordinátáit, ha ismert az $A\ (-2; 8)$ pont, valamint az AB szakasz B – hez legközelebbi $H\ \left(\frac{1}{3}; -\frac{3}{4}\right)$ hetedelőpont koordinátái!

93. (E) Egy egyenesre illeszkednek – e a következő pontok: $P\ (5,5; -4,8)$, $Q\ (-5,5; -9,2), R\ (15; -1)$? Határozd meg a PQ egyenesnek azokat a pontjait, amelyek háromszor olyan messze vannak a P – től, mint a Q!

94. (E) Adott az $A\ (6; 8)$ és $B\ (9; 2)$ pont. Határozd meg az AB egyenes azon pontjainak a koordinátáit, amelyek B – től kétszer olyan távol vannak, mint A – tól!

95. (E) Milyen arányban osztja a $P\ (3; 1)$ pont az AB szakaszt, ha a szakasz végpontjai: $A\ (-3; -1)$ és $B\ (12; 4)$?

96. (E) Milyen arányban osztja ketté a $P\ (2; 4)$ pont az $A\ (-1; 2)$ és $B\ (3; 7)$ pontok által meghatározott szakaszt?

97. (E) Bizonyítsd be, hogy a P pont illeszkedik az AB szakaszra, ha $A\ (-3; 2), B\ (13; -10)$ és $P\ (1; -1)$. Számítsd ki az $\frac{AP}{PB}$ tört értékét!

98. (E) Adott három egy egyenesre illeszkedő pont: $A\ (-5; 1), B\ (10; 7), C\ (20; 11)$. Számítsd ki az $\frac{AB}{BC}, \frac{AC}{BC}, \frac{AB}{AC}$ arányokat!

99. (E) Egy szakasz végpontjának koordinátái $A\ (2014; 2017)$ és $B\ (2022; 2001)$. Az A pontot tükrözzük az AB szakasz B – hez legközelebbi negyedelőpontjára. Írd fel a tükörkép koordinátáit!

100. (E) Adott az $A\ (-1; 4)$ és $B\ (2; 5)$ pont. Határozd meg a A pontnak a B középpontú $\lambda = 5$ arányszámú középpontos hasonlóságával kapott A' képét!

101. (E) Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái $A\ (6; 6), B\ (1; -4)$ és $C\ (-2; 5)$.

a) **A háromszöget az $O\ (-4; -4)$ pontból felére kicsinyítjük. Határozd meg a képháromszögek csúcspontjainak koordinátáit!**

b) **A háromszögön végrehajtjuk azt a hasonlósági transzformációt, melynek középpontja $O\ (-4; -4)$, a hasonlóság aránya pedig $\lambda = 3$. Írd fel a képháromszög csúcspontjainak koordinátáit!**

102. (K) Az $A\ (3; 2)$ és $B\ (7; -3)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban meghosszabbítjuk a felével. Számítsd ki a kapott végpontok koordinátáit!

103. (E) Az $A\ (4; 3)$ és a $B\ (6; -1)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban megnyújtjuk másfélszeresére. Számítsd ki a végpontok koordinátáit!

104. (E) Adott az $A\ (7; -3)$ és $B\ (12; -4)$ pont. Hosszabbítsd meg az AB szakaszt a B – n túl a háromszorosára! Számítsd ki az így kapott C pont koordinátáit!

105. (E) Adott az AB szakasz két végpontja: $A\ (-17; 19)$ és $B\ (11; -21)$. Hosszabbítsuk meg az AB szakaszt a B ponton túl a hosszának a hétszeresével. Számítsd ki a kapott P végpont koordinátáit!

106. (E) Az $ABCD$ paralelogramma csúcspontjai $A\ (0; 0), B\ (12; 3), C\ (16; 12)$ és $D\ (4; 9)$. A Q pont a DC oldal D csúcshoz közelebbi harmadolópontja, a P pont a BC oldal C csúcshoz közelebbi negyedelőpontja. Igazoljuk, hogy a QB szakasz M felezőpontjára $\frac{AM}{MP} = 2$ teljesül!

107. (E) Egy $ABCD$ rombuszban $B\ (14; 2), D\ (2; 8)$, és az átlók aránya $\frac{BD}{AC} = 3$. Számítsd ki a hiányzó csúcspontok koordinátáit!

108. (E) Egy rombusz két szemközti csúcsának koordinátái: $B\ (-3; 7), D\ (5; 11)$. Az AC átló a BD átló kétszerese. Határozd meg az A és a C csúcsok koordinátáit!

109. (E) Egy $ABCD$ téglalap két szomszédos csúcsa $(-12; 6)$ és $(15; 19)$. Két szomszédos oldalának aránya $2:3$. Számítsd ki a téglalap köré írt kör középpontjának a koordinátáit!

110. (E) Az $ABCD$ trapéz csúcsainak koordinátái: $A\ (-1; -2), B\ (7; 2), C\ (2; 4), D\ (0; 3)$. Az AD szár D – hez közelebbi, valamint a BC szár C – hez közelebbi harmadolópontja E, illetve F. Számítsd ki az $\overrightarrow{EF}$ koordinátáit! Igaz – e, hogy EF párhuzamos a trapéz alapjaival?

111. (E) Tekintsük az $A\ (0; 9), B\ (6; 3), C\ \left(-\frac{1}{3}; -1\right), D\ \left(3; -\frac{7}{2}\right)$ koordinátájú pontokat. Határozd meg a P pont koordinátáit, ha $PA = PB$ és $PC : PD = 2 : 3$!

112. (E) Adottak az ABC háromszög csúcsai: $A\ (5; 2), B\ (8; 6)$ és $C\ (-3; 8)$. Számítsd ki annak a P pontnak a koordinátáit, amelyet az A pontból induló szögfelező metsz ki a szemközti oldalból!

113. (E) Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A\ (5; 2), B\ (-3; 8), C\ (10; 14)$. Számítsd ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekben a belső szögfelezők az oldalakat metszik! A koordinátapárok pontos értékét add meg!

114. (E) Egy háromszög csúcspontjai: O az origó, $A\ (-2; 5)$ és $B\ (4; 2)$. Határozd meg az AB oldalon a P pontot és az OB oldalon a Q pontot úgy, hogy az OP és PQ egyenes az OAB háromszöget három egyenlő területű részre bontsa!

115. (E) Az $A\ (0; 0), B\ (9; 0), C\ (11; 4), D\ (2; 4)$ pontok egy paralelogrammát határoznak meg. A P pont a BC oldal C – hez közelebbi negyedelőpontja, a Q pont a DC szakasz D – hez közelebbi harmadolópontja.

***a)* Határozd meg annak a H pontnak a koordinátáit, amely az AP szakaszt $2:1$ arányban osztja!**

***b)* Határozd meg a BQ szakasz F felezőpontját!**

***c)* Mit tapasztalsz? Fogalmazd meg általánosan az észrevételt!**

116. (E) A térképre helyezett koordináta – rendszerben két pont koordinátái: $A\ (-3; 1)$ és $B\ (5; 3)$. Egy kerékpáros a nyílegyenes AB úton állandó sebességgel halad, és 1 óra alatt jut el az A pontból a B pontba. Add meg a koordinátáit annak a pontnak, amelybe a kerékpáros az A pontból elindulva fél óra; másfél óra; két óra; illetve öt óra múlva ér el!

117. (E) A szomszéd háromszög alakú rétjének csúcspontjai a megfelelően választott koordináta – rendszerben: $A\ (-11; 2), B\ (-3; 0), C\ (-8; 5)$.

***a)* Bizonyítsd be, hogy a rétet határoló utak közül kettő derékszögben metszi egymást!**

***b)* A szomszéd a rét derékszögű csúcsából olyan ösvény kialakítását tervezi, amelynek pontjai egyenlő távolságra találhatók a rét befogóitól. Számítsd ki annak a pontnak a koordinátáit, amelyben a tervezett ösvény metszi a rét átfogóját!**

***c)* Mekkora távolságra van a rét oldalaitól az a pont, amely mindhárom határoló úttól ugyanolyan messze van?**

***d)* Számítsd ki a fenti pont koordinátáit!**

118. (E) Egy fiú berajzolta a koordináta - rendszerbe a következő pontokat: $A\ (-2; -3)$, $B\ (4; -1)$, $C\ (4; 5)$ és $D\ (1; 4)$. Egy lány, miután megnézte az elkészült ábrát, azt állította, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz.

a) **Igaza van – e a lánynak?**

b) **Barnabás szerint a négyszög átlói $2:1$ arányban osztják egymást. Hogyan gondolkodhatott a fiú?**

c) **Számítsd ki, hogy mely pontban metszik egymást az átlók!**

119. (E) Sík területen négy kiemelkedő tereptárgy figyelhető meg, melyek koordinátái: $A\ (0; 0)$, $B\ (12; 3)$, $C\ (2; 6)$, $D\ (6; 7)$.

a) **Bizonyítsd be, hogy a tereptárgyak egy trapéz négy csúcsában helyezkednek el!**

b) **Az A és D tárgyat, valamint a B és C tárgyat egy – egy egyenes út köti össze. Összesen hány kilométer hosszú a két út, ha a koordináta – rendszer egysége 1000 méter?**

c) **A koordináta – rendszer melyik pontjában metszi egymást a két útszakasz?**

120. (E) Egyenes vonalú mozgást végző katicabogár mászik a négyzetrácsos táblán, és átmegy az $A\ (2; 6)$ és a $B\ (8; 1)$ koordinátájú pontokon. Mely pontokban metszi a katicabogár pályája a berajzolt koordinátatengelyeket?

121. (E) Egy egyenes az x tengelyt az $A\ (6; 0)$, az y tengelyt a $B\ (0; 8)$ koordinátájú pontokban metszi. Határozd meg az OAB derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság talppontjának a koordinátáit! (O jelenti az origót)

122. (E) Igazold, hogy az AB és CD szakaszok középpontosan hasonlók, ha koordinátáik: $A\ (2; 3)$, $B\ (7; 5)$, $C\ (-6; 5)$, $D\ (9; 11)$. Mi lehet a hasonlóság középpontja és aránya?

123. (E) Adott két kör, középpontjaik $O_1\ (35; 16)$, $O_2\ (5; -24)$, sugaraik $r_1 = 25$, $r_2 = 15$ egység hosszúak. Számítsd ki a közös belső, illetve külső érintők metszéspontjának a koordinátáit!

124. (K) Számítsd az A, B, C pontok által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit!

a) $A\,(-2; 0), B\,(5; 4), C\,(1; -1)$

b) $A\,(8; 2), B\,(4; 6), C\,(0; -2)$

c) $A\,(6; 2), B\,(-4; 1), C\,(2; -3)$

d) $A\left(3; \frac{1}{5}\right), B\left(\frac{4}{7}; -\frac{2}{9}\right), C\,(-6; 8)$

e) $A\left(\frac{4}{5}; -\frac{2}{3}\right), B\left(-\frac{2}{15}; \frac{1}{4}\right), C\left(\frac{3}{5}; \frac{5}{6}\right)$

f) $A\left(1\frac{1}{2}; -5\right), B\left(-0,5; -2\frac{1}{2}\right), C\,(14; 1,5)$

125. (E) Számítsd az A, B, C pontok által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit! ($a, b \in \mathbb{R}$)

a) $A\left(-\sqrt{32}; \sqrt{8}\right), B\left(2 \cdot \sqrt{8}; -\sqrt{18}\right), C\left(0; \sqrt{2}\right)$

b) $A\left(\sqrt{2}; -\sqrt{3}\right), B\left(-\sqrt{8}; \sqrt{12}\right), C\left(-\sqrt{32}; \sqrt{27}\right)$

c) $A\left(\frac{a-b}{2}; \frac{a+b}{2}\right), B\left(\frac{a-b}{3}; \frac{a+b}{3}\right), C\,(a+b; a-b)$

126. (K) Az ABC háromszög csúcspontjai: $A\,(-2; 1), B\,(6; -1)$ és $C\,(5; 6)$. Írd fel annak a háromszög belsejébe eső pontnak a koordinátáit, amelyet a háromszög csúcsaival összekötve olyan háromszögeket kapunk, amelyeknek a területe megegyezik. A háromszög melyik nevezetes pontját kapjuk?

127. (K) Az ABC háromszög csúcsai: $A\,(-2; 1), B\,(2; -2), C\,(8; 6)$. Határozd meg a kerületét, az $ABC\sphericalangle$ szöget, a területét, a köré írt kör O középpontjának és az S súlypontjának koordinátáit!

128. (K) Határozd meg a háromszög hiányzó csúcsának koordinátáit, ha adott két csúcsa és az S súlypontja!

a) $A\,(5; -2), B\,(-3; 3), S\,(4; -7)$

b) $B\,(-3; 4), C\left(\frac{3}{5}; 1\right), S\left(2; -\frac{7}{6}\right)$

c) $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right), C\left(-\frac{11}{5}; \frac{7}{3}\right), S\left(0; \frac{2}{3}\right)$

129. (K) Határozd meg a háromszög hiányzó csúcsának koordinátáit és kerületét, ha adott két csúcsa és az S súlypontja: $A\,(-4;-3), B\,(5;12), S\,(2;-2)$!

130. (E) Határozd meg a háromszög hiányzó csúcsának koordinátáit, ha adott két csúcsa és az S súlypontja: $A\left(-\sqrt{75};-\sqrt{27}\right), C\left(\sqrt{12};\sqrt{27}\right), S\left(\sqrt{300};-\sqrt{48}\right)$!

131. (E) Számítsd az A, B, C, D pontok által meghatározott négyszög súlypontjának koordinátáit: $A\,(1;2), B\,(2;0), C\,(9;6), D\,(4;8)$!

132. (E) Határozd meg a tetraéderek súlypontját a csúcsaik ismeretében!

$$A\,(1;0;2), B\,(-3;0;0), C\,(3;4;5), D\,(2;5;7)$$

133. (E) Egy tetraéder súlypontja az origó. Határozd meg az A csúcspont koordinátáit, ha $B\,(1;1;2), C\,(0;-3;5)$ és $D\,(4;4-5)$!

134. (K) Adott egy háromszög oldalfelező pontjai: $F_{AB}\,(-4;-2), F_{AC}\,(7;1)$ és $F_{BC}\,(3;10)$. Határozd meg a háromszög csúcsainak koordinátáit! Számítsd ki az eredeti és az oldalfelező pontok által meghatározott háromszögek súlypontjának koordinátáit! Mit tapasztalsz?

135. (K) Adott az $A\,(1;2), B\,(13;4)$ és $C\,(5;10)$ pont. Add meg az ABC háromszög súlypontjának, illetve az oldalfelezőpontjai által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit! Mit tapasztalsz?

136. (K) Számítsd ki az $ABCDEF$ hatszög AB, CD és EF oldalának felezőpontja által alkotott háromszög súlypontját, majd a BC, DE és FA oldalak felezőpontja által alkotott háromszög súlypontját, ha $A\,(-1;9), B\,(-4;5), C\,(0;3), D\,(-2;-2)$, $E\,(6;0)$ és $F\,(4;9)$! Mit vehetünk észre?

137. (K) Egy háromszög csúcsai $A(5;2), B(-3;8), C(10;14)$. A háromszöget a koordináta – rendszer kezdőpontja körül $+90°$ - al elforgatva az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk. Határozd meg az elforgatott háromszög csúcsainak és súlypontjának koordinátáit!

138. (E) Ismerjük az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátáit: $A\,(5;7), B\,(-4;3)$ és $C\,(2;-2)$. Számítsd ki mindhárom oldal felezőpontjának koordinátáit! Számítsd ki külön – külön mindhárom súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontjának koordinátáit! Számítsd ki az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit!

139. (E) Egy ABC háromszög oldalait AB, BC, CA sorrendben és $1:2$ arányban osztó pontok koordinátái rendre $P_1\,(-4;2), P_2\,(1;3)$ és $P_3\,(0;-2)$. Határozd meg a csúcspontok koordinátáit! Száímtsd ki az ABC háromszög súlypontjának és a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontjának távolságát!

140. (K) Határozd meg az ABC háromszög AB oldalának felezőpontját, ha adott a C csúcsa és az S súlypontja: $C\,(-1;1)$ és $S\,(1;2)$! Meghatározhatók – e egyértelműen ezekben az esetekben az A és a B csúcspontok koordinátái? Adj meg egy olyan A, B pontpárt, ami a feltételeknek megfelel!

141. (E) Határozd meg az ABC háromszög csúcsainak koordinátáit, ha a súlypontja $S\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{5}\right)$, az AC oldal felezőpontja $F_{AC}\left(4;-\frac{7}{6}\right)$, a BC oldalé pedig $F_{BC}\,(-1,2)$!

142. (K) Az ABC háromszög A csúcsának koordinátái $A\,(-53;-40)$, az AC oldal felezőpontjának koordinátái $F_{AC}\left(-\frac{93}{2};\frac{11}{2}\right)$ és súlypontjának koordinátái $S\left(-\frac{34}{3};\frac{35}{3}\right)$. Számítsd ki a háromszög hiányzó csúcspontjainak koordinátáit!

143. (K) Az ABC háromszög C csúcsa az ordinátatengelyre, az S súlypontja az abszcisszatengelyre esik. Határozd meg a C és S pontok koordinátáit, ha a háromszög másik két csúcsa $A\,(4;-1)$ és $B\,(5;3)$!

144. (K) Az ABC háromszög A csúcsának helyvektora $\vec{a}\,(-2;3)$, $\overrightarrow{AB} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$ és $\overrightarrow{CB} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$. Számítsd ki a háromszög csúcsainak és súlypontjának koordinátáit!

145. (K) Egy derékszögű háromszög befogói 12 és 5 egység hosszúak. Számítsd ki a háromszög köré írt kör középpontjának a súlyponttól mért távolságát!

146. (E) Egy egyenlőszárú derékszögű háromszögnél az átfogó végpontjainak koordinátái: $A\,(-2; 5)$ és $B\,(6; -1)$.

a) **Határozd meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!**

b) **Add meg a háromszög magasságpontját!**

c) **Határozd meg a háromszög területét!**

d) **Mekkora a körülírt körbe írt szabályos hatszög területe?**

147. (E) A koordináta – rendszerben egy pontszerű test egyenes pályán mozog. Mozgása során áthalad a $(-7; 1)$ és a $(3; 2)$ pontokon. Milyen távolságra volt a koordináta – rendszer kezdőpontjától, amikor ahhoz a legközelebb volt?

148. (E) Adottak a koordinátasík A és B pontjai, amelyeknek koordinátáira: $A\,(-3; 2)$ és $B\,(5; 3)$. Melyek a koordinátái annak az x tengelyre illeszkedő P pontnak, amelyre a $PA^2 + PB^2$ összeg a lehető legkisebb? Mennyi az összeg minimuma?

149. (E) Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A\,(-4; 8); B\,(0; -2); C\,(7; 0)$. A DEF háromszög csúcsainak koordinátái: $D\,(1; 12); E\,(6; 3); F\,(14; 6)$. Az ABC háromszög súlypontja legyen S_1, a DEF háromszög súlypontja S_2. Igazold, hogy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 3 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$. Oldd meg a feladatot általánosan is!

150. (E) Adott az $ABCD$ paralelogramma és a síkjában egy P pont. Tükrözd a P pontot az A csúcsra, majd az így kapott P' képpontot a B csúcsra, majd az így kapott P'' képpontot a C csúcsra, ezután az így kapott P''' képpontot a D csúcsra! Bizonyítsd be, hogy $P'''' = P$!

151. (E) Igazold koordináta – geometriai eszközökkel, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 − 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $11-12.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(21) Saját anyagok