Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

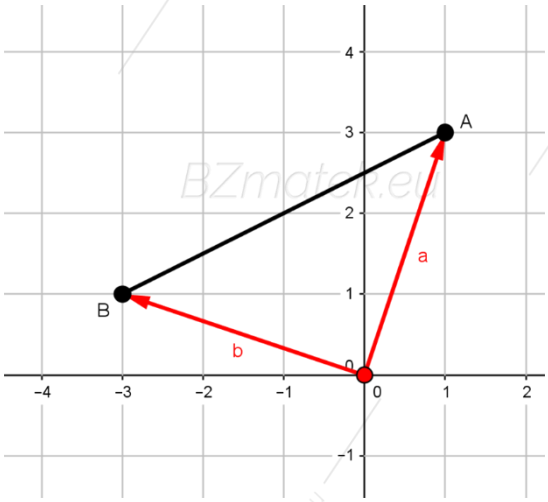
- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Az $A\ (a_1;\ a_2)$ és $B\ (b_1;\ b_2)$ pontok távolsága, vagyis az AB szakasz, illetve az AB vektor hossza: $d_{AB} = |AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Bizonyítás:
Legyen az A pont helyvektora $\vec{a}\ (a_1; a_2)$ és a B pont helyvektora pedig $\vec{b}\ (b_1; b_2)$.

Tekintsük a következő ábrát:



Az $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ vektor hossza megegyezik az AB szakasz hosszával.

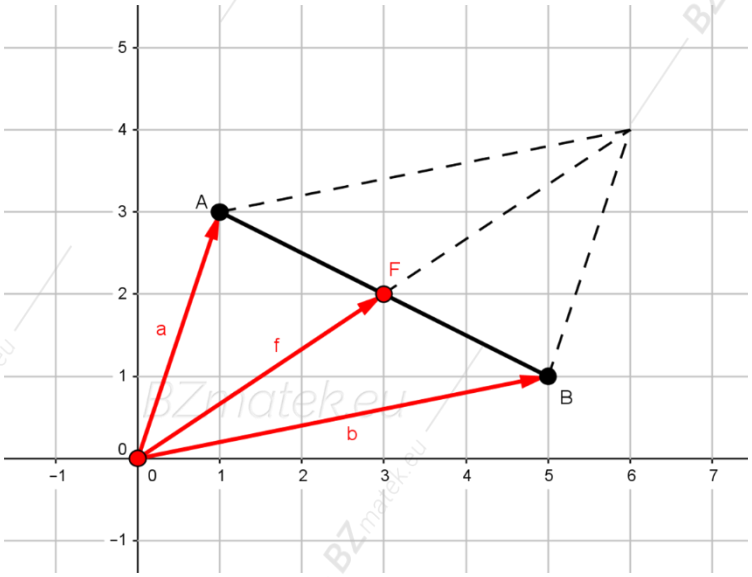
Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

■

TÉTEL:
Az $A\,(a_1;\,a_2)$ és $B\,(b_1;\,b_2)$ pontokkal megadott szakasz $F\,(f_1;f_2)$ felezőpontjának koordinátái egyenlők a megfelelő koordináták összegének felével: $f_1 = \frac{a_1 + b_2}{2}$ és $f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

Bizonyítás:
Legyen az A pont helyvektora $\vec{a}\,(a_1;a_2)$, a B pont helyvektora $\vec{b}\,(b_1;b_2)$ és az F felezőpont helyvektora pedig $\vec{f}\,(f_1;f_2)$.

Tekintsük a következő ábrát:



Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor összege éppen a hosszabb átló.

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, így a következőt kapjuk: $\vec{f} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

Ebből az összegvektor koordinátáira vonatkozó összefüggés segítségével adódik a bizonyítandó állítás:

$f_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ és $f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

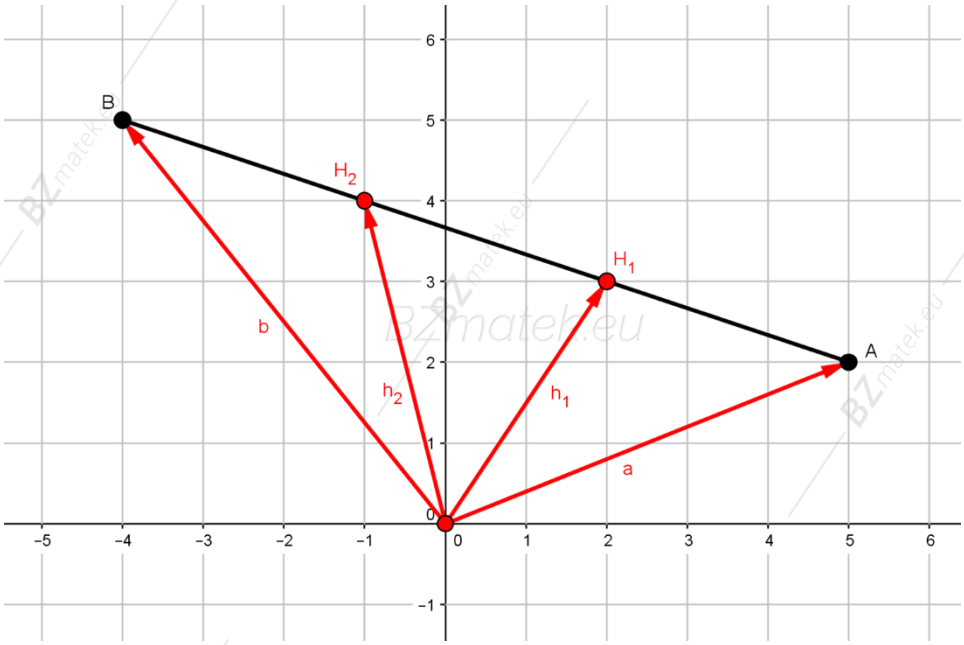
■

TÉTEL:
Az $A\,(a_1;\,a_2)$ és $B\,(b_1;\,b_2)$ pontokkal megadott szakasz A – hoz közelebbi $H_1\,(x_1;y_1)$ harmadoló pontjának koordinátái: $x_1 = \frac{2a_1 + b_1}{3}$ és $y_1 = \frac{2a_2 + b_2}{3}$.

Az $A\,(a_1;\,a_2)$ és $B\,(b_1;\,b_2)$ pontokkal megadott szakasz B – hez közelebbi $H_2\,(x_2;y_2)$ harmadoló pontjának koordinátái: $x_2 = \frac{a_1 + 2b_1}{3}$ és $y_2 = \frac{a_2 + 2b_2}{3}$.

<u>Bizonyítás:</u>
Legyen az A pont helyvektora $\vec{a}\,(a_1;a_2)$, a B pont helyvektora $\vec{b}\,(b_1;b_2)$, az A – hoz közelebbi H_1 harmadoló pont helyvektora $\overrightarrow{h_1}\,(x_1;y_1)$ és a B – hez közelebbi H_2 harmadoló pont helyvektora pedig $\overrightarrow{h_2}\,(x_2;y_2)$

Tekintsük a következő ábrát:



Először tekintsük az A – hoz közelebbi H_1 harmadoló pont koordinátáit.

Az összefűzési szabály segítségével a következőt kapjuk: $\overrightarrow{h_1} = \vec{a} + \overrightarrow{AH_1}$.

Az $\overrightarrow{AH_1}$ vektor felírható a következőképpen: $\overrightarrow{AH_1} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.

Helyettesítsük vissza a kapott kifejezést: $\overrightarrow{h_1} = \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3} = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

Ebből az összegvektor és a skalárszoros koordinátáira vonatkozó összefüggések segítségével adódik a bizonyítandó állítás: $x_1 = \frac{2a_1 + b_1}{3}$ és $y_1 = \frac{2a_2 + b_2}{3}$.

Ezután tekintsük a B – hez közelebbi H_2 harmadoló pont koordinátáit.

Az összefűzési szabály segítségével a következőt kapjuk: $\overrightarrow{h_2} = \vec{a} + \overrightarrow{AH_2}$.

Az $\overrightarrow{AH_2}$ vektor felírható a következőképpen: $\overrightarrow{AH_2} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.

Helyettesítsük vissza a kapott kifejezést:

$$\overrightarrow{h_2} = \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{2 \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a}}{3} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}.$$

Ebből az összegvektor és a skalárszoros koordinátáira vonatkozó összefüggések segítségével adódik a bizonyítandó állítás:

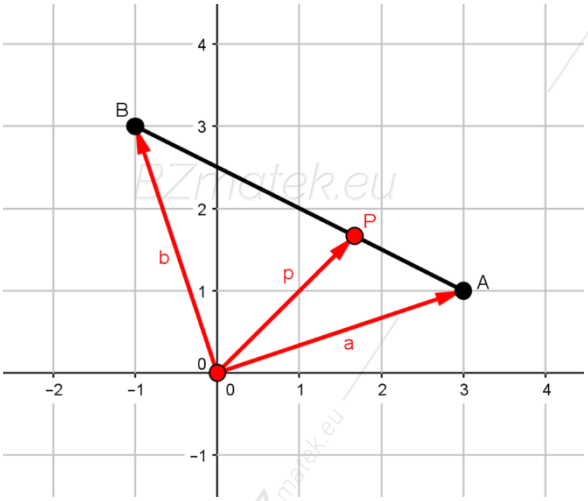
$x_2 = \frac{a_1 + 2b_1}{3}$ és $y_2 = \frac{a_2 + 2b_2}{3}$.

■

TÉTEL:
Az $A\ (a_1;\ a_2)$ és $B\ (b_1;\ b_2)$ pontokkal megadott szakaszt $m : n$ arányban osztó $P\ (p_1; p_2)$ pont koordinátái: $p_1 = \frac{n \cdot a_1 + m \cdot b_1}{m+n}$ és $p_2 = \frac{n \cdot a_2 + m \cdot b_2}{m+n}$.

Bizonyítás:
Legyen az A pont helyvektora $\vec{a}\ (a_1; a_2)$, a B pont helyvektora $\vec{b}\ (b_1; b_2)$ és a P osztópont helyvektora pedig $\vec{p}\ (p_1; p_2)$.

Tekintsük a következő ábrát:



Mivel $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$, így felírhatjuk a következőt: $\frac{AP}{AB} = \frac{AP}{AP+PB} = \frac{1}{\frac{AP+PB}{AP}} = \frac{1}{1+\frac{PB}{AP}} = \frac{1}{1+\frac{n}{m}} = \frac{m}{m+n}$.

Ezt átrendezve a következőt kapjuk: $AP = \frac{m}{m+n} \cdot PB$.

Ekkor a $\vec{p}$ helyvektort felírhatjuk a következőképpen:

$$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{m}{m+n} \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{\vec{a} \cdot (m+n) + m \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)}{m+n} =$$

$$= \frac{m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b} - m \cdot \vec{a}}{m+n} = \frac{n \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}}{m+n}$$

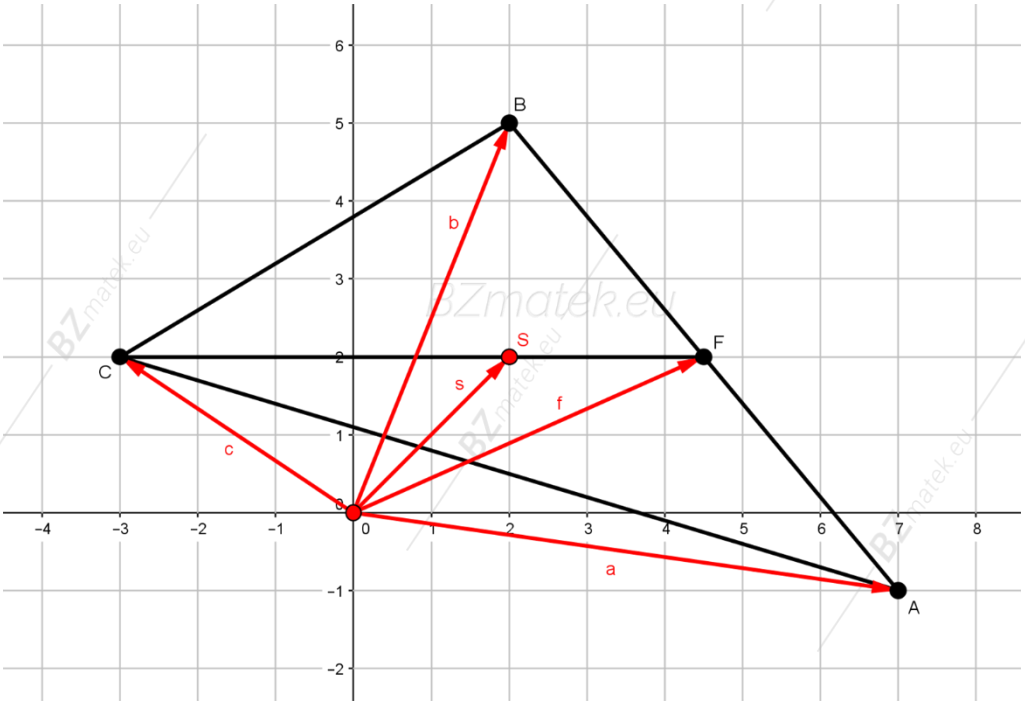
Ebből az összegvektor és a skalárszoros koordinátáira vonatkozó összefüggések segítségével adódik a bizonyítandó állítás:

$p_1 = \frac{n \cdot a_1 + m \cdot b_1}{m+n}$ és $p_2 = \frac{n \cdot a_2 + m \cdot b_2}{m+n}$.

TÉTEL:
Az $A\,(a_1;\ a_2)$, $B\,(b_1;\ b_2)$ és $C\,(c_1;\ c_2)$ csúcspontú háromszög $S\,(s_1;\ s_2)$ súlypontjának koordinátái: $s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$ és $s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$.

Bizonyítás:
Legyen az A csúcs helyvektora $\vec{a}\,(a_1; a_2)$, a B csúcs helyvektora $\vec{b}\,(b_1; b_2)$, a C csúcs helyvektora $\vec{c}\,(c_1; c_2)$, az AB oldal F felezőpontjának helyvektora $\vec{f}\,(f_1; f_2)$ és az S súlypont helyvektora pedig $\vec{s}\,(s_1; s_2)$.

Tekintsük a következő ábrát:



Az $\vec{f}$ helyvektort felírhatjuk a következőképpen: $\vec{f} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

Mivel az S súlypont a CF súlyvonalnak a háromszög csúcsától távolabbi harmadoló pontja, így az $\vec{s}$ helyvektort felírhatjuk a következőképpen:

$$\vec{s} = \frac{2\vec{f} + \vec{c}}{3} = \frac{2 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \vec{c}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

Ebből az összegvektor koordinátáira vonatkozó összefüggés segítségével adódik a bizonyítandó állítás:

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \text{ és } s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}.$$

■