Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Komplex számok

DEFINÍCIÓ: (Komplex szám)
Az $a + b \cdot i$ alakú kifejezést komplex számnak nevezzük, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $i^2 = -1$.

Megjegyzés:

- *Az $a + b \cdot i$ alakot kanonikus, vagy algebrai alaknak nevezzük.*
- *Az $i = \sqrt{-1}$ kifejezést képzetes (imaginárius) egységnek nevezzük.*
- *A $z = a + b \cdot i$ alakú komplex számban az a – t valós résznek, a b – t képzetes résznek nevezzük. Jelölés: $a = Re\ z; b = Im\ z$.*
- *A komplex számok egy valós számnak és egy képzetes számnak az összegeként adódnak.*
- *A valós számok speciális komplex számok, ahol $b = 0$.*
- *Azt a komplex számot, aminek csak valós része van, tiszta valós komplex számnak, amelyiknek pedig csak képzetes része van, tiszta képzetes komplex számnak nevezzük.*
- *A valós számok halmaza valódi részhalmaza a komplex számok halmazának. Jele: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.*

DEFINÍCIÓ: (Egyenlő komplex számok)
Két komplex számot akkor tekintünk egyenlőnek, ha a valós rész a valós résszel, a képzetes rész a képzetes résszel megegyezik. *Jelöléssel: $a + b \cdot i = c + d \cdot i$, akkor $a = c$ és $b = d$.*

DEFINÍCIÓ: (Ellentett)
A $z = a + b \cdot i$ komplex szám ellentettje (additív inverze) a $-z = -a - b \cdot i$ komplex szám.

Megjegyzés:
Egy komplex számnak és az ellentettjének összege 0.

DEFINÍCIÓ: (Konjugált)
A $z = a + b \cdot i$ komplex szám konjugáltja a $\overline{z} = a - b \cdot i$ komplex szám.

Megjegyzés:

- *Egy valós szám konjugáltja önmaga.*
- *Egy komplex szám konjugáltjának a konjugáltja önmaga. Jelöléssel: $\overline{\overline{z}} = z$.*

DEFINÍCIÓ: (Összeg)
A $z_1 = a + b \cdot i$ és $z_2 = c + d \cdot i$ komplex számok összegén a $z = (a + c) + (b + d) \cdot i$ komplex számot értjük.

DEFINÍCIÓ: (Különbség)
A $z_1 = a + b \cdot i$ és $z_2 = c + d \cdot i$ komplex számok különbségén a $z = (a - c) + (b - d) \cdot i$ komplex számot értjük.

DEFINÍCIÓ: (Szorzat)
A $z_1 = a + b \cdot i$ és $z_2 = c + d \cdot i$ komplex számok szorzatán a $z = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$ komplex számot értjük.

Megjegyzés:
Egy komplex számnak és a konjugáltjának összege, illetve szorzata mindig valós szám.

DEFINÍCIÓ: (Hányados)
A $z_1 = a + b \cdot i$ és $z_2 = c + d \cdot i$ komplex számok hányadosán a $z = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$ komplex számot értjük ($z_2 \neq 0$).

Megjegyzés:

- *Két komplex szám hányadosánál alkalmazzuk a nevező gyöktelenítését: a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk a nevező konjugáltjával.*
- *Az összeadás és szorzás kommutatív, illetve asszociatív, míg a szorzás disztributív az összeadásra nézve.*

TÉTEL:
Bármely z_1 és z_2 komplex számok esetén igazak a következő összefüggések ($z_2 \neq 0$):

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

DEFINÍCIÓ: (Reciprok)
A 0 – tól különböző $z = a + b \cdot i$ komplex szám reciproka (multiplikatív inverze) a $z^{-1} = \frac{1}{z}$ komplex szám.

Megjegyzés:
A reciprok általános alakja: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+b\cdot i} = \frac{1}{a+b\cdot i} \cdot \frac{a-b\cdot i}{a-b\cdot i} = \frac{a-b\cdot i}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i.$

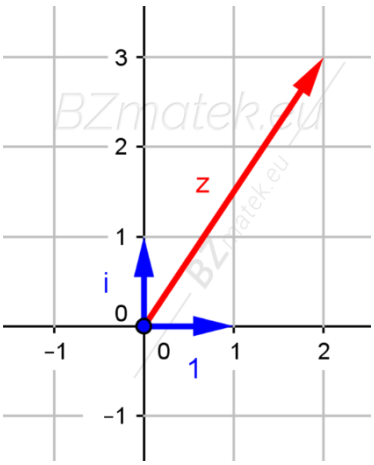
DEFINÍCIÓ: (Hatvány)
Ha n pozitív egész, akkor a z komplex szám n - edik hatványán a $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ darab}$ komplex számot értjük.

Megjegyzés:

- *Minden komplex szám nulladik hatványa* 1. *Jelöléssel:* $z^0 = 1$.
- *A hatványozást lehet definiálni tetszőleges komplex kitevőre is úgy, hogy a hatványozás azonosságai érvényben maradjanak.*

TÉTEL:
Bármely z komplex szám és n pozitív egész esetén igaz a következő összefüggés: $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

A komplex számok geometriai alakja:
Minden (a; b) rendezett valós számpárhoz kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhetünk egy $z = \mathrm{a} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{i}$ komplex számot. Így a Descartes – féle derékszögű koordináta – rendszerben a z komplex szám szemléltethető egy origó kezdőpontú $\vec{z}\,(a; b)$ helyvektorral.



Megjegyzés:

- *A komplex számok kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetőek egy sík, a Gauss – féle számsík (komplex számsík) pontjainak. Ekkor az első tengelyt valóstengelynek, a másodikat képzetes tengelynek nevezzük. Előbbin találhatóak a valós számok, míg az utóbbin a tiszta képzetes számok. Az egymásra merőleges bázisvektorok pedig a valós egység* (1)*, illetve a képzetes egység* (i)*.*

- *Bár a valós számok a számegyenes pontjainak megfelelően sorba rendezhetőek, azonban a komplex számsík pontjainak megfelelő komplex számok halmazán nem tudunk ilyen tulajdonságú rendezést értelmezni. Ezáltal a „melyik nagyobb" kifejezésnek nincs értelme, vagyis nem használhatunk egyenlőtlenségeket nem valós komplex számok között.*

- *Ha a komplex számnak megfelelő vektort tükrözzük az* x *– tengelyre, akkor a komplex szám konjugáltjának megfelelő vektort kapjuk.*

- *Ha a komplex számnak megfelelő vektornak vesszük az ellentettjét, vagyis tükrözzük az origóra, akkor a komplex szám additív inverzének megfelelő vektort kapjuk.*

- *A komplex számok összegének geometriai jelentése megegyezik a számoknak megfelelő vektorok összegvektorával.*

DEFINÍCIÓ: (Abszolútérték)
A $z = a + b \cdot i$ komplex szám abszolútértéke a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nemnegatív valós szám.

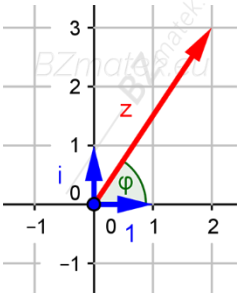
Megjegyzés:

- *A komplex számok abszolútértéke megegyezik a helyvektorok hosszával.*

- *A komplex számok esetén nem igaz, hogy* $|z|$ *értéke:* z *vagy* $-z$*.*

- *A konvex számok konjugáltjára igazak a következők:* $|z| = |\overline{z}|$ *és* $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$*.*

DEFINÍCIÓ: (Trigonometrikus alak)
Egy komplex számot megadhatunk a helyvektor hosszának (r) és irányszögének (φ) segítségével: $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Ezt a felírást a z komplex szám trigonometrikus alakjának nevezzük.



Megjegyzés:

- *Egy z komplex szám* $(z \neq 0)$ *irányszöge (argumentuma) az a* φ *szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatnunk az origó körül ahhoz, hogy átmenjen a* z *– nek megfelelő ponton. Jelölés:* $arg\, z$.

- *A trigonometrikus alakban szereplő* φ *irányszög nem egyértelmű, mert az egymástól a teljesszög egészszámú többszörösében eltérő szögek ugyanazt az irányt határozzák meg.*

- *A trigonometrikus alakot Moivre – képletnek is nevezzük.*

- *A* $z = 0$ *– nak nincs trigonometrikus alakja: bár az abszolútértéke* 0, *de az argumentumát nem értelmezzük, mivel a zérusvektor iránya tetszőleges.*

- *Ha* $a \neq 0$, *akkor érvényes a következő összefüggés:* $\frac{b}{a} = \frac{r \cdot sin\, \varphi}{r \cdot cos\, \varphi} = tg\, \varphi$.

- *A komplex szám konjugáltjának trigonometrikus alakja:* $\overline{z} = r \cdot [\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)]$.

- *A komplex szám reciprokának trigonometrikus alakja:* $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)]$.

- *Ha a sík pontjait, illetve a pontokba mutató helyvektorokat* $\vec{z}\,(r; \varphi)$ *alakban adjuk meg, ahol* $0 \leq \varphi < 2\pi$, *akkor ezeket az értékeket a* $\vec{z}$ *polárkoordinátáinak, a koordináta - rendszert pedig polárkoordináta – rendszernek nevezzük.*

TÉTEL:
A $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$ komplex számok pontosan akkor egyenlők, ha $r_1 = r_2$ és $\varphi_1 - \varphi_2 = k \cdot 360°$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$).

<u>Komplex számok alakjainak átírása:</u>

1. A trigonometrikus alakból úgy térünk át, hogy a szögfüggvények értékeit behelyettesítjük, majd ezután egyszerűbb alakra hozzuk a kapott algebrai alakot.

2. Az algebrai alakból úgy térünk át, hogy kiszámoljuk a komplex szám abszolútértékét és egy irányszögét, majd ezek ismeretében felírjuk a trigonometrikus alakot.

Megjegyzés:

- *Amikor a trigonometrikus alakot kell meghatároznunk, akkor az irányszöget* $0° \leq \varphi < 360°$ *intervallumban adjuk meg. Ezáltal a komplex számot egyértelműen meghatározza a vektor hossza és szöge.*

- *A* φ *meghatározásánál figyelembe kell vennünk azt is, hogy a komplex szám melyik síknegyedben helyezkedik el, vagyis azt, hogy az* a *– nak, illetve* b *– nek milyen az előjele.*

TÉTEL:
A $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ komplex számok (ahol $z_1, z_2 \neq 0$) szorzata: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

TÉTEL:
A $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ komplex számok (ahol $z_2 \neq 0$) hányadosa: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

Megjegyzés:
Az összeadás és kivonás elvégzésére a trigonometrikus alak nem alkalmas, így ezen műveletek elvégzése előtt, először át kell írnunk a számot algebrai alakba.

TÉTEL: (Moivre – tétele)
A $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ szám n – edik hatványa: $z^n = r^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)]$.

DEFINÍCIÓ: (n – edik gyök)
A z komplex szám n – edik gyökén (ahol n pozitív egész) olyan w komplex számot értünk, amelynek n – edik hatványa z, vagyis $w^n = z$. Jelölés: $w = \sqrt[n]{z}$.

TÉTEL:
A $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ komplex szám n – edik gyökei: $\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, ahol $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Megjegyzés:

- *Egy komplex számnak (és így a valós számoknak is) pontosan n darab n – edik gyöke van a komplex számok halmazában.*
- *Míg a valós számok halmazán a gyökvonás egyértelmű művelet, vagyis egy valós számnak pontosan egy n - edik gyöke van, addig a komplex számok körében többértelmű művelet.*
- *Az $\sqrt[n]{r}$ az r szám valós számok halmazán vett (egyetlen) n - edik gyökét jelenti.*
- *Ha az n - edik gyök felírásában szereplő k szám tetszőleges egész szám lehet, akkor abban az esetben mikor a k_1 és k_2 különbsége az n szám egész számú többszöröse, a megoldások egyenlők lesznek.*
- *Ha a z komplex szám n - edik gyökeit ábrázoljuk a Gauss – féle számsíkon, akkor $n \geq 3$ esetén a megfelelő pontok egy szabályos n - szög csúcsai.*

DEFINÍCIÓ: (n –edik egységgyök)
Az $x^n - 1 = 0$ egyenlet megoldásait (ahol n pozitív egész) n – edik komplex egységgyöknek nevezzük. Jele: $\varepsilon = \sqrt[n]{1}$.

DEFINÍCIÓ: (Egységgyök)
Az ε komplex számot egységgyöknek nevezzük, ha n – edik egységgyök egy n pozitív egészre.

TÉTEL:
Az n – edik egységgyökök felírhatóak a következő alakban: $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n}$, ahol $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Megjegyzés:

- *Az $\varepsilon_0 = 1$ és $\varepsilon_k = {\varepsilon_1}^k$ teljesül minden $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ esetén.*
- *Az n – edik egységgyökök egy szabályos n - szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek a körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa* 1.

TÉTEL
Egy $z \neq 0$ komplex szám összes n – edik gyökét megkapjuk, ha egy rögzített n - edik gyökét megszorozzuk sorra az n – edik egységgyökökkel. Jelöléssel: $w^n = z$ esetén $\sqrt[n]{z} = w \cdot \varepsilon_k$, ahol $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

DEFINÍCIÓ: (Primitív n – edik egységgyök)
Azt mondjuk, hogy az ε komplex szám primitív n – edik egységgyök, ha n – edik egységgyök, de nem m – edik egységgyök semmilyen $0 < m < n$ egészre.

TÉTEL:
A primitív n – edik egységgyökök száma $\varphi(n)$, ahol φ az Euler – féle függvény.

TÉTEL:
Az $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n}$ egységgyök akkor és csak akkor primitív n - edik egységgyök, ha k relatív prím n - hez.

Gyakorló feladatok

1. **Írd fel a következő rendezett valós számpároknak megfelelő komplex számokat!**

   $(-1; 2)$ $\quad (3; -4)$ $\quad (0; 5)$ $\quad (-6; 0)$

2. **Adott a $z_1 = 1 + 2 \cdot i$ és a $z_2 = -3 + i$ komplex szám. Határozd meg a következő műveletek értékét!**

   $z_1 + z_2$ $\quad z_2 - z_1$ $\quad z_1 \cdot z_2$ $\quad \frac{z_2}{z_1}$

3. **Határozd meg a következő komplex számok ellentettjét és konjugáltját!**

   $3 + 2 \cdot i$ $\quad 5 - 7 \cdot i$ $\quad -4 \cdot i$ $\quad \frac{2+i}{3}$

4. **Határozd meg a képzetes egység $0.$; $1.$; $2.$; $3.$; $4.$; $5.$; $6.$; $7.$ hatványának értékeit!**

5. **Határozd meg a következő hatványok értékét!**

   i^{2016} $\quad (-i)^7$ $\quad (2 - i)^2$ $\quad (1 + 2 \cdot i)^3$ $\quad \left(\frac{i}{3}\right)^{-5}$ $\quad (6 + 2 \cdot i)^0$

6. **Ábrázold a következő komplex számokat Gauss - féle számsíkon, majd írd fel a komplex számok trigonometrikus alakját!**

   $z_1 = 5 - 2 \cdot i$ $\quad z_2 = -3 + i$ $\quad z_3 = 4 \cdot i$ $\quad z_4 = 2$

7. **Adott a $z_1 = 2 \cdot (\cos 45° + i \cdot \sin 45°)$ és a $z_2 = 3 \cdot (\cos 120° + i \cdot \sin 120°)$ komplex számok. Határozd meg a következő műveletek eredményét, majd a trigonometrikus alakot írd át algebrai alakra!**

   $z_1 \cdot z_2$ $\quad \frac{z_2}{z_1}$ $\quad \frac{1}{z_2}$ $\quad {z_1}^2$ $\quad {z_2}^5$

8. Határozd meg a $z = -6 \cdot (\sin 210° - i \cdot \cos 300°)$ trigonometrikus alakját!

9. Írd fel a következő komplex számokat trigonometrikus alakban, majd határozd meg a gyökök értékeit!

$\sqrt[3]{27}$ $\sqrt{-25}$ $\sqrt[4]{-4 \cdot i}$ $\sqrt[3]{1+i}$

10. Határozd meg a következő gyökök értékeit, majd írd fel azokat algebrai alakban!

$\sqrt[3]{8 \cdot (\cos 90° + i \cdot \sin 90°)}$ $\sqrt{16 \cdot (\cos 60° + i \cdot \sin 60°)}$

11. Határozd meg az $1.$, $2.$, $3.$, $4.$ egységgyökök trigonometrikus, illetve algebrai alakját! Sorold fel a primitív egységgyököket!

12. Add meg a hatodik egységgyökök trigonometrikus, illetve algebrai alakját!

13. Oldd meg a következő egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{C}$)

a) $x^2 + 2 = 0$

b) $x^2 - 2x + 5 = 0$

c) $5x^3 - 40 = 0$

d) $2x^4 + 32 = 0$

e) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Saját anyagok

BZmatek.eu