

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. május 4.**

# **MATEMATIKA**

## **KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA**

### **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
  - helyes lépés: *kipipálás*
  - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
  - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
  - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
  - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
  - nem érthető rész: *kérdőjel és/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

- 
6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
  7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
  8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
  9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
  10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás,  $n!$ ,  $\binom{n}{k}$  kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\log$  és ezek inverzei), a  $\pi$  és az  $e$  szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
  11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
  12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
  13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
  14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

## I.

<b>1.</b>		
3	2 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>2.</b>		
9	2 pont	<i>A <math>2^9</math> válasz is elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>3.</b>		
$A \cap B = \{12; 18; 24; 30; 36\}$	2 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

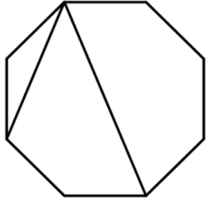
<b>4.</b>		
(Mivel egy négyszög belső szögeinek összege $360^\circ$ , a legkisebb szöget $\alpha$ -val jelölve:) $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360^\circ$ .	2 pont	
Ebből $\alpha = 36^\circ$ .	1 pont	
A legnagyobb szög: $(4 \cdot 36^\circ =) 144^\circ$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>4 pont</b>

<b>5.</b>		
B és C	2 pont	<i>1 jó válasz, vagy 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>6.</b>		
Terjedelem: 600 Ft	1 pont	
Módusz: 1000 Ft	1 pont	
Medián: 1200 Ft	1 pont	
Átlag: 1300 Ft	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>4 pont</b>

<b>7.</b>		
$(150\,000 \cdot 0,94 =) 141\,000$ (Ft)	2 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>8.</b>		
Például (1; 2).	2 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>9.</b>		
8	2 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>10.</b>		
$x_1 = 5$	1 pont	
$x_2 = 3$	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>11.</b>		
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$	2 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>12. első megoldás</b>		
Összesen ( $9 \cdot 10 \cdot 10 =$ ) 900 darab háromjegyű pozitív egész szám van (összes eset száma).	1 pont	
Ezek közül $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ olyan, amelynek a számjegyei különbözőek (kedvező esetek száma).	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{648}{900} (= 0,72)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>4 pont</b>

<b>12. második megoldás</b>		
Annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott szám második számjegye különbözik az elsőtől: $\frac{9}{10}$ .	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy a harmadik számjegye különbözik az első kettőtől: $\frac{8}{10}$ .	1 pont	
A keresett valószínűség ezek szorzata: $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0,72$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>4 pont</b>

## II. A

**13. a)**

A zárójelek felbontása után: $x^2 + 8x + 16 + x^2 + 3x + 2 = 9.$	2 pont	
$2x^2 + 11x + 9 = 0$	1 pont	
$x_1 = -1, x_2 = -4,5$	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

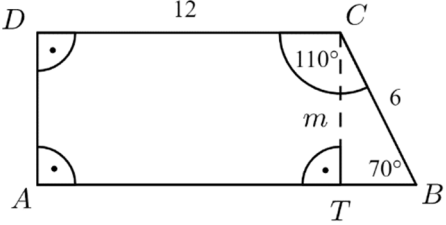
**13. b) első megoldás**

Az első egyenletből: $y = 7 - 2x.$	1 pont	
A második egyenletbe behelyettesítve: $3x - 7 \cdot (7 - 2x) = 36.$	1 pont	
$17x - 49 = 36$	1 pont	
$x = 5$	1 pont	
$y = -3$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

**13. b) második megoldás**

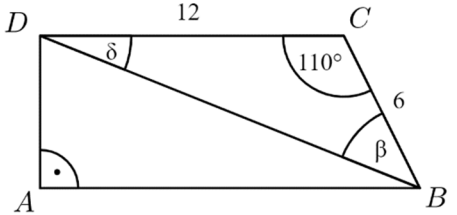
Az első egyenletet 3-mal, a másodikat 2-vel szorozva: $\left. \begin{array}{l} 6x + 3y = 21 \\ 6x - 14y = 72 \end{array} \right\}$	2 pont	<i>Az első egyenletet 7-tel szorozva: <math>14x + 7y = 49.</math></i>
Az elsőből a másodikat kivonva: $17y = -51.$	1 pont	<i>Ehhez a második egyenletet hozzáadva: <math>17x = 85.</math></i>
$y = -3$	1 pont	$x = 5$
Valamelyik eredeti egyenletbe behelyettesítve: $x = 5.$	1 pont	$y = -3$
Ellenőrzés.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

**14. a)**

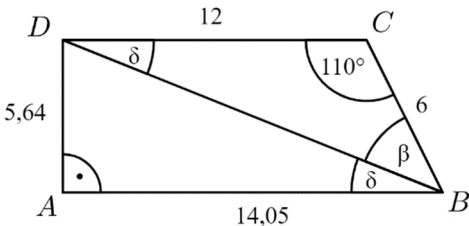
$ABC \sphericalangle = 70^\circ$	1 pont	
 <p>A <math>BCT</math> háromszögben: <math>\sin 70^\circ = \frac{m}{6}</math></p>	1 pont	
$AD = CT = m \approx 5,64 \text{ cm}$	1 pont	

Pitagorasz-tétellel: $TB^2 + m^2 = 36$ ,	1 pont	$\cos 70^\circ = \frac{TB}{6}$
amiből $TB \approx 2,05$ (cm).	1 pont	
$AB \approx 12 + 2,05 = 14,05$ cm	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

**14. b) első megoldás**

 <p>A <math>BCD</math> háromszögben a koszinusztételt felírva:  <math>BD^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 110^\circ</math>.</p>	1 pont	
$BD \approx 15,14$ cm	1 pont	
A $BCD$ háromszögben a szinusztételt felírva: $\frac{6}{15,14} = \frac{\sin \delta}{\sin 110^\circ}$ .	1 pont	$\frac{12}{15,14} = \frac{\sin \beta}{\sin 110^\circ}$
$\sin \delta \approx 0,3724$	1 pont	$\sin \beta \approx 0,7448$
(Mivel $\delta < 90^\circ$ , így) $\delta \approx 21,9^\circ$	1 pont	$\beta \approx 48,1^\circ$
$\beta = 180^\circ - 110^\circ - 21,9^\circ = 48,1^\circ$	1 pont	$\delta = 21,9^\circ$
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

**14. b) második megoldás**

 <p>(Az a) részfeladatban kapott eredményekből, az <math>ABD</math> háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva:)  <math>BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{5,64^2 + 14,05^2} \approx 15,14</math> cm.</p>	2 pont	
$\angle ABD = \angle BDC$ , mert váltószögek.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az $ABD$ háromszögben: $\operatorname{tg} \delta = \frac{5,64}{14,05}$ .	1 pont	
$\delta \approx 21,9^\circ$	1 pont	
$\beta = 180^\circ - 110^\circ - 21,9^\circ = 48,1^\circ$	1 pont	$\beta = 70^\circ - \delta$
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó valamelyik válaszát mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.*

<b>15. a)</b>		
$70 = 37 \cdot \lg K + 31$	1 pont	
$\frac{39}{37} = \lg K$	1 pont	
$K = 10^{\frac{39}{37}} \approx 11,325$	2 pont	
0,325 év megfelel $0,325 \cdot 12 = 3,9$ hónapnak,	1 pont	
tehát kerekítve 11 éves és 4 hónapos az a kutya, amely emberévekben mérve 70 éves.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>15. b)</b>		
A 8 éves kutya a második számítási módszer szerint $5,5 \cdot 8 + 12 = 56$ éves emberévekben mérve,	2 pont	
az amerikai képlet szerint pedig $37 \cdot \lg 8 + 31 \approx 64,4$ éves.	2 pont	
Ez az érték az 56-nak $\left(\frac{64,4}{56} = \right)$ 1,15-szorosa,	1 pont	
tehát 15%-kal nagyobb.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	



## II. B

<b>16. a)</b>		
Egy betűhármás megadása az $\{ABE, ACD, ACE, AEF, BGH, DGH\}$ halmazból.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>16. b) első megoldás</b>		
A foksámok összege 30,	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó az ábra alapján helyesen megadja az élek számát.</i>
az eddig lejátszott mérkőzések száma ennek fele, azaz 15.	1 pont	
Az 5 forduló alatt megrendezendő mérkőzések száma $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ .	1 pont	
Tehát $(20 - 15 =)$ 5 mérkőzés maradt el.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>16. b) második megoldás</b>		
Ha eddig minden mérkőzést lejátszottak volna, akkor minden foksám 5 lenne.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az ehhez „hiányzó” foksámok rendre: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1.	1 pont	
Az elmaradt mérkőzések száma a hiányzó foksámok összegének (10) a fele,	1 pont	
tehát 5 mérkőzés maradt el.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>16. c)</b>		
Annak a valószínűsége, hogy a játékos egy büntetőlövésből nem szerez gólt: $(1 - 0,3 =)$ 0,7.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A kért valószínűség binomiális eloszlással számolva (4-szer szerez gólt és 6-szor nem): $\binom{10}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^6 \approx$	2 pont	
$\approx 0,200$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>16. d) első megoldás</b>		
$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó méterben helyesen számol, és méterben adja meg a választ.</i>
A szabványos korong sugara: $r = 3,81 \text{ (cm)}$ .	1 pont	
A szabványos korong térfogata: $V = 3,81^2 \cdot \pi \cdot 2,54 \approx 115,8 \text{ (cm}^3\text{)}$ .	1 pont	<i>Ha a hasonlóság aránya <math>k</math>, akkor a nagyméretű korong térfogata: <math>V = (3,81 \cdot k)^2 \cdot \pi \cdot (2,54 \cdot k)</math></i>
A $k$ -szorosra nagyított korong térfogata az eredetinek $k^3$ -szorosra: $1\,000\,000 = 115,8 \cdot k^3$ .	1 pont	
Ebből $k \approx \sqrt[3]{8636} \approx 20,5$ .	1 pont	
A nagyméretű korong magassága: ( $20,5 \cdot 2,54 \approx$ ) $52 \text{ cm}$ ,	1 pont	
alapkörének átmérője pedig: ( $20,5 \cdot 7,62 \approx$ ) $156 \text{ cm}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>16. d) második megoldás</b>		
A feladat szövege alapján (a szabványos és a nagyméretű korong esetében is) az alapkör $r$ sugarára, $d$ átmérőjére és a korong $m$ magasságára egyaránt $2r = d = 3m$ teljesül.	1 pont	
Azaz (mindkét korong esetében) $m = \frac{2}{3}r$ .	1 pont	
Ha a nagyméretű korong sugarát (méterben mérve) $R$ jelöli, akkor a feladat szövege alapján: $R^2 \pi \cdot \frac{2}{3}R = 1$ .	1 pont	
Ebből $R \approx \sqrt[3]{0,4775} \approx 0,78 \text{ (m)}$ .	2 pont	
A nagyméretű korong alapkörének átmérője: ( $2 \cdot 0,78 =$ ) $1,56 \text{ m}$ ,	1 pont	
magassága pedig: $\left(\frac{2}{3} \cdot 0,78 =\right) 0,52 \text{ m}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>17. a) első megoldás</b>		
A feladat szövege alapján megoldandó a következő egyenletrendszer: $\left. \begin{array}{l} m + b = 200 \\ 21m + b = 5200 \end{array} \right\}$	2 pont	
A második egyenletből az elsőt kivonva: $20m = 5000$ .	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $m = 250$	1 pont	
és $b = -50$ . (Tehát a hozzárendelési szabály: $x \mapsto 250x - 50$ .)	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>17. a) második megoldás</b>		
A kérdéses lineáris függvény grafikonjának meredekségére: $m = \frac{5200 - 200}{21 - 1} =$	2 pont	
$= 250$ .	1 pont	
$200 = 250 + b$	1 pont	$5200 = 21 \cdot 250 + b$
Ebből $b = -50$ . (Tehát a hozzárendelési szabály: $x \mapsto 250x - 50$ .)	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>17. b)</b>		
Számtani sorozat esetén ( $a_1 = 200, a_{21} = 5200$ ): $S_{21} = \frac{(200 + 5200) \cdot 21}{2} =$	2 pont	
$= 56\,700$ métert úszna Anna a teljes felkészülés alatt.	1 pont	
Mértani sorozat esetén ( $b_1 = 200, b_{21} = 5200$ ): $5200 = 200 \cdot q^{20}$ .	1 pont	
$q^{20} = 26$	1 pont	
$q \approx 1,177$	1 pont	
$S_{21} = 200 \cdot \frac{1,177^{21} - 1}{1,177 - 1} \approx$	1 pont	
$\approx 33\,500$ métert úszna Anna.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>17. c) első megoldás</b>		
A résztvevők száma legyen $n$ , ekkor a nők száma $0,36n$ , a férfiak száma $0,64n$ .	1 pont	
Az életkorok összege $0,36n \cdot 35 + 0,64n \cdot 38 = 36,92n$ ,	2 pont	
átlaga pedig $\left( \frac{36,92n}{n} = \right) 36,92$ év.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>17. c) második megoldás</b>		
A résztvevők 0,36 része nő, 0,64 része férfi.	1 pont	
Súlyozott átlaggal számolva: $0,36 \cdot 35 + 0,64 \cdot 38 \approx$	2 pont	
$\approx 37$ év az összes induló átlagéletkora.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>18. a)</b>		
$5 \cdot 2 = 10$ olyan egyenes van, amely illeszkedik az $A, B, C, D, E$ pontok valamelyikére, illetve az $F, G$ pontok valamelyikére.	2 pont	
Az $A, B, C, D, E$ pontokra, valamint az $F$ és $G$ pontokra is illeszkedik 1-1 egyenes, összesen tehát 12 megfelelő egyenes van.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>18. b) első megoldás</b>		
A három kiválasztott pont akkor alkot háromszöget, ha nem esnek egy egyenesre. (Az $A, B, C, D, E$ pontok közül vagy 2-t választunk, vagy 1-et.)	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az $A, B, C, D, E$ pontok közül 2-t $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választhatunk ki,	1 pont	
és ezekhez a harmadik csúcsot 2-féleképpen ( $F$ és $G$ közül) választhatjuk ki. Ebben az esetben tehát 20 különböző háromszög van.	1 pont	
Az $A, B, C, D, E$ pontok közül 1-et 5-féleképpen választhatunk ki, és ezt kötjük össze $F$ -fel és $G$ -vel. Ebben az esetben tehát 5 különböző háromszög van.	1 pont	
Így összesen $20 + 5 = 25$ háromszög létezik.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>18. b) második megoldás</b>		
(Komplementer összeszámolást alkalmazunk.) A 7 pont közül 3-at $\binom{7}{3} = 35$ -féleképpen választhatunk ki,	2 pont	
de ezek közül az egy egyenesre illeszkedő $\binom{5}{3} = 10$ darab ponthármas nem alkot háromszöget.	2 pont	
Így összesen $35 - 10 = 25$ háromszög létezik.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

*Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha rendezetten felsorolja a lehetséges háromszögeket, és ez alapján helyesen válaszol.*

<b>18. c) első megoldás</b>		
$ \overline{LK}  = (\sqrt{(-2)^2 + 4^2} =) \sqrt{20}$	1 pont	
$ \overline{LM}  = (\sqrt{4^2 + 2^2} =) \sqrt{20}$	1 pont	
$ \overline{KM}  = (\sqrt{6^2 + (-2)^2} =) \sqrt{40}$	1 pont	
$\sqrt{20}^2 + \sqrt{20}^2 = \sqrt{40}^2$ , tehát (a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) az $L$ -nél valóban derékszög van.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>18. c) második megoldás</b>		
$\overline{LK} = (-2; 4)$	1 pont	
$\overline{LM} = (4; 2)$	1 pont	
Az $\overline{LK}$ vektor az $\overline{LM}$ vektor $90^\circ$ -os elforgatottja, tehát $L$ -nél valóban derékszög van.	1 pont	<i>Skaláris szorzatuk:</i> $-2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 0$ .
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>18. c) harmadik megoldás</b>		
A $KL$ egyenes meredeksége: $\frac{1-5}{1-(-1)} = -2$ .	1 pont	
Az $LM$ egyenes meredeksége: $\frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$ .	1 pont	
Ezek szorzata $-1$ ,	1 pont	
tehát az egyenesek merőlegesek (így $L$ -nél valóban derékszög van).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>18. d)</b>		
(A Thalész-tétel, illetve a megfordítása miatt) derékszögű háromszögben a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, sugara pedig az átfogó fele.	1 pont	
Az átfogó felezőpontja: $F_{KM} = (2; 4)$ .	1 pont	
$r = \frac{KM}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$	1 pont	
A körülírt kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

*Megjegyzés: A  $KM$  oldal felezőmerőlegesének egyenlete:  $y = 3x - 2$ , a  $KL$  oldalé:  $y = 0,5x + 3$ , az  $LM$  oldalé:  $y = -2x + 8$ .*