ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2010. május 4.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
2, 3, 5 és 67.	2 pont	*1 pont jár, ha csak három helyes prímtényezőt ad meg. Ha a négy prímszám mellett az 1 is szerepel, 1 pont jár. Egyéb téves vagy hiányos megoldásért nem jár pont.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
5 ; –5	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
Az átlag fogalmának helyes használata.	1 pont	
Az átlag: ≈168,3 cm.	1 pont	
Az átlagmagassághoz legközelebb Marci magassága van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.		
A helyes válasz betűjele: B	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
Felsorolás: MTABN MTBAN AMTBN BMTAN ABMTN BAMTN	2 pont	*Ha egy hibát ejt (rossz esetet felsorol, vagy jót kihagy), 1 pont, több hiba esetén nem kap pontot.*
Összesen:	**2 pont**	*Jó válasz esetén jár a 2 pont attól függetlenül, hogy a feladatlapon a felsorolást a vizsgázó hova írta le.*

6.		
Az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot.	1 pont	*Az indoklás ábrára is támaszkodhat.*
A keletkező derékszögű háromszögben a keresett α szögre $\cos\alpha = \frac{2,5}{6}$ $(\approx 0,4167)$.	1 pont	
Az alapon fekvő szögek $\approx 65^{\circ}$-osak.	1 pont	*Nem megfelelően kerekített szög esetén nem jár a pont.*
Összesen:	**3 pont**	

7.		
A berajzolt élek: A-D és D-F	2 pont	*A-F és D-D (hurokél) is jó megoldás.*
Összesen:	**2 pont**	*A 2 pont nem bontható.*

8.		
$p=\frac{5}{9}$ $(\approx 0{,}56;\ 56\%)$	2 pont	*A 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

9.		
A megoldások: -2π; $-\pi$; 0; π; 2π.	3 pont	*A megadott alaphalmazon dolgozik: 1 pont.* *A szögeket radiánban adja meg: 1pont.* *Az alaphalmazból minden gyököt megad: 1 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

10.		
A: igaz	1 pont	
B: hamis	1 pont	
C: igaz	1 pont	
D: igaz	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

11.		
Sárának összesen $\binom{5}{2}$, azaz 10 féle tippje lehet (és ezek mindegyike ugyanakkora valószínűségű).	1 pont	
Ezek közül a {10; 53} pár a helyes.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{1}{10}$ $(=0{,}1=10\%)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
A: igaz	1 pont	
B: hamis	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

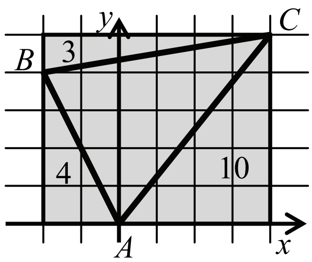
II./A

13.		
(Jelölje a két keresett számot x és y.) A számtani közép $\frac{x+y}{2}$,	1 pont	
A mértani közép $\sqrt{x \cdot y}$.	1 pont	
$x+y=16$,	1 pont	
$x \cdot y=23{,}04$.	1 pont	
$y = 16–x$; $(16–x)x = 23{,}04$	1 pont	
Az egyenletrendszerből adódó másodfokú egyenlet $x^2-16x+23{,}04=0$,	2 pont	
melynek gyökei az x_1=1,6 és x_2=14,4.	2 pont	*Helyes gyökönként 1-1 pont.*
y_1=14,4 és y_2=1,6	2 pont	*A 2 pont akkor is jár, ha a keresett számok szimmetriájára hivatkozik.*
A két szám az 1,6 és a 14,4.	1 pont	*Megfogalmazott válasz, vagy ellenőrzött számpár esetén jár a pont.*
Összesen:	**12 pont**	

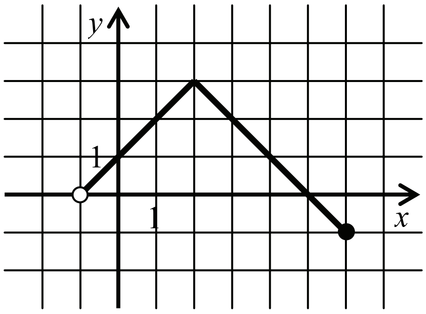
14. a)		
Az egyenes átmegy az origón, $m = \frac{4}{-2} = -2$;	1 pont	*Bármelyik alakban megadott helyes egyenletért 2 pont adható.*
Egyenlete: $y = -2x$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

14. b)		
A háromszög legnagyobb szöge a legnagyobb oldallal szemben van (vagy mindhárom szöget kiszámolja).	1 pont	
Az oldalhosszúságok: $AB=\sqrt{20}$, $AC=\sqrt{41}$, $BC=\sqrt{37}$.	2 pont	*Két szakaszhossz jó kiszámítása 1 pont.*
Az AC-vel szemben levő szög legyen β. Alkalmazva a koszinusz tételt:	1 pont	*A jelölés a megoldás menetéből is kiderülhet.* *Skaláris szorzattal:* $\mathbf{c}=\overrightarrow{BA}=(2\ ;\ -4)$, $\mathbf{a}=\overrightarrow{BC}=(6\ ;\ 1)$. $\mathbf{ca}=12-4=8$, *tehát* $\cos\beta=$ $=\frac{8}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{37}}\approx 0{,}2941$.
$41=20+37-2\sqrt{20\cdot 37}\cos\beta$.	1 pont	
$\cos\beta \approx 0{,}2941$,	1 pont	
$\beta \approx 72{,}9°$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	*A szögnek egyéb helyes kerekítéssel megadott nagysága is elfogadható.*

14. c) **első megoldás**		
A háromszög egy területképlete: $t = \dfrac{AB \cdot BC \cdot \sin\beta}{2}$.	1 pont	
$t \approx \dfrac{\sqrt{20 \cdot 37} \cdot \sin 72{,}9°}{2}$.	1 pont	
A háromszög területe 13 (területegység).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. c) **második megoldás**		
Foglaljuk egy 6·5-ös téglalapba a háromszöget!  		
A téglalap területe 30.	1 pont	
Vonjuk le ebből három derékszögű háromszög területét, így megkapjuk az *ABC* háromszög területét.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
A háromszög területe: 30–3–4–10=13.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. a)



A függvény helyes grafikonja.	3 pont	*Helyesen megjelenített transzformáció lépésenként 1 pont. Pontonkénti ábrázolás esetén: jó a töréspont két koordinátája 1-1 pont; mindkét szár meredeksége jó 1 pont.*
A leszűkítés helyes végpontokkal.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. b)

Az értékkészlet a $[-1;3]$ intervallum,	2 pont	*Ha bármelyik végpont értéke hibás, 0 pontot kap. Ha a nullát kihagyja az értékkészletből, 1 pontot veszít. Ha nem helyesen adja meg valamelyik végpont lezárását, 1 pontot veszít.*
a függvény zérushelye az $(x=)\,5$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. c)

P nincs a grafikonon,	1 pont	
mert pl. $-\lvert 3{,}2-2\rvert+3=1{,}8$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

15. d)

x	–0,5	0	1,7	2	2,02	4	5,5
$-\lvert x-2\rvert+3$	0,5	1	2,7	3	2,98	1	–0,5

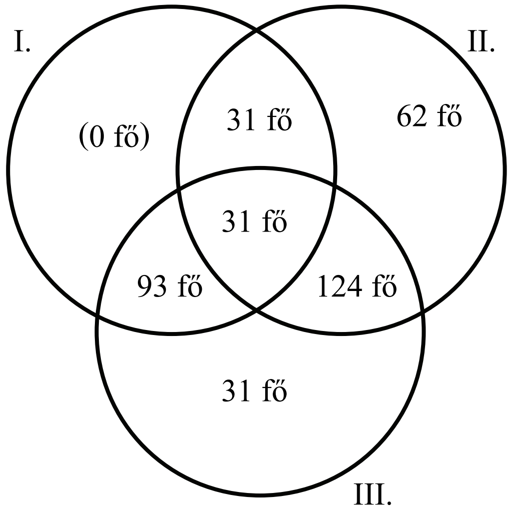
1 pont

Sorba rendezés: –0,5; 0,5; 1; 1; 2,7; 2,98; 3.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a mediánt rendezés nélkül jól állapítja meg.*
A medián 1.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II./B

16. a)		
31 tanuló olvasta mindhárom kiadványt.	2 pont	*A 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

16. b)



A Venn−diagramban a három halmaz metszetének a kitöltéséért nem jár pont, a többi tartomány helyes kitöltéséért 1-1 pont jár.	6 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c)		
(372 fő, tehát) a tanulók 60 %-a olvasta legalább az egyik kiadványt.	2 pont	*Ha a választ nem %-kal adja meg, 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

16.d)		
84 fő látogatta, 42 fő nem látogatta a rendezvényeket.	1 pont	
Közülük 28 fő, illetve 21 fő olvasta az Iskolaéletet.	1 pont	
A két megkérdezett diák $\binom{126}{2}$–féleképpen választható ki (összes eset).	1 pont	
A rendezvényt látogatók közül $\binom{28}{1}$ -féle olyan diák, a nem látogatók közül $\binom{21}{1}$ -féle olyan diák választható, aki olvasta az Iskolaéletet.	1 pont	*A kevésbé részletezett helyes gondolatmenet is 3 pont.*
A kedvező esetek száma tehát $28\cdot21$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\dfrac{28\cdot21}{\binom{126}{2}}\approx$	1 pont	
≈0,075(=7,5%).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. a)		
Az évenkénti növekedés szorzószáma (növekedési ráta) 1,054.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
2003-at követően a 2007-es évvel bezárólag 4 év telik el.	1 pont	
$41{,}9 \cdot 1{,}054^4 \; (\approx 51{,}71)$	1 pont	
A 2007-es évben kb. 51,7 millió autót gyártottak.	1 pont	*A helyes kerekítéssel megadott jó válaszért jár a pont.*
Összesen:	**4 pont**	

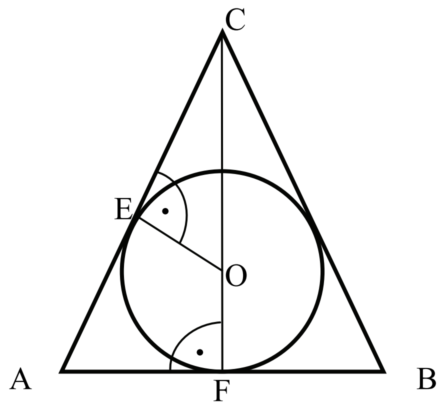
17. b)		
A 2003-at megelőző évekre évenként 1,011-del kell osztani.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
1997 után a 2003-as évvel bezárólag 6 év telik el.	1 pont	
$\frac{41{,}9}{1{,}011^6} \; (\approx 39{,}24 \text{ millió})$	1 pont	
1997-ben kb. 39,2 millió autót gyártottak.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Kerekítési hibáért a 17. a) és 17. b) feladat értékelésekor összesen csak 1 pont vonható le.		

17. c)		
Az évenkénti csökkenés szorzószáma legyen x. 2008 után a 2013-as évvel bezárólag 5 év telik el. $48{,}8 \cdot x^5 = 38$,	1 pont	*A jelölés a megoldás menetéből is kiderülhet.*
$x^5 \approx 0{,}779$	1 pont	
$x \approx \sqrt[5]{0{,}779} \; (\approx 0{,}951)$	1 pont	
Az évenkénti százalékos csökkenés kb. 4,9 %.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. d)		
Ha 2013 után y év múlva lesz 76%-a az éves autószám, akkor $0{,}97^y = 0{,}76$.	1 pont	
Mindkét oldal tízes alapú logaritmusa is egyenlő.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
$y \lg 0{,}97 = \lg 0{,}76$,	1 pont	
$y \approx 9{,}01$.	1 pont	
Kb. 9 év múlva, tehát 2022-ben csökkenne az évi termelés a 2013-as évinek a 76%-ára.	1 pont	*Az adatok közelítő értéke miatt a 10. év is elfogadható válaszként.*
Összesen:	**5 pont**	

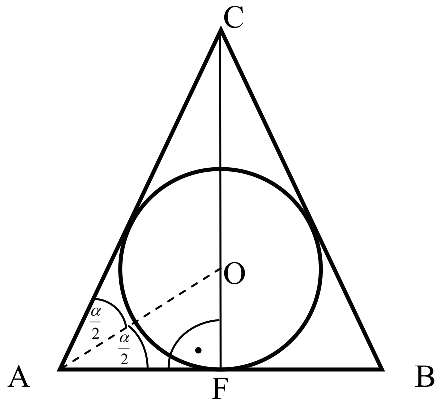
18. a)		
Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyezik meg.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
$V_{\text{külső}} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot V_{\text{belső}}$	1 pont	
$V_{\text{belső}} = \frac{1^2 \cdot \pi \cdot 2{,}5}{3}$ $(\approx 2{,}62\ cm^3)$	1 pont	
$V_{\text{külső}} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot V_{\text{belső}}$ $(\approx 4{,}52 cm^3)$	1 pont	
$V_{\text{külső}} - V_{\text{belső}} \approx 1{,}9\ cm^3$ Egy csokoládéváz kb. 1,9 cm^3 csokoládét tartalmaz.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b) **első megoldás**



A legnagyobb sugarú gömb a belső kúp beírt gömbje.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
A kúp és a beírt gömbjének tengelymetszete egy egyenlő szárú háromszög (amelynek alapja 2 cm, magassága 2,5 cm hosszú), illetve annak a beírt köre.	1 pont	
Az ábra jelöléseit használva: *AFC* háromszög hasonló az *OEC* háromszöghöz, ezért $\frac{AF}{AC} = \frac{OE}{OC}$.	1 pont	
(Alkalmazva Pitagorasz tételét az *AFC* háromszögre, adódik:) $AC = \sqrt{7{,}25}$ $(\approx 2{,}7\ cm)$	1 pont	
A beírt kör sugarát *R*-rel jelölve: $\frac{1}{\sqrt{7{,}25}} = \frac{R}{2{,}5 - R}$.	1 pont	
$2{,}5 - R = \sqrt{7{,}25} \cdot R$	1 pont	
$3{,}7R \approx 2{,}5$, ebből $R \approx 0{,}68\, cm$ Tehát a lehető legnagyobb marcipángömb sugara kb. 0,7 cm.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. b) második megoldás



A legnagyobb sugarú gömb a belső kúp beírt gömbje.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
A kúp és a beírt gömbjének tengelymetszete egy egyenlő szárú háromszög (amelynek alapja 2 cm, magassága 2,5 cm hosszú), illetve annak a beírt köre.	1 pont	
$tg\,\alpha = \frac{FC}{AF} = 2,5$	1 pont	
$\alpha \approx 68,2^\circ$	1 pont	
AO felezi az α szöget.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{OF}{AF}$ $\quad (OF \approx 0,68\,\text{cm})$	1 pont	
Tehát a lehető legnagyobb marcipángömb sugara kb. 0,7 cm.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. c)

Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott gömb nem az előírt méretű 0,1.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott az előírásnak megfelelő méretű 0,9.	1 pont	
A keresett valószínűséget az $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ képlettel számolhatjuk ki,	1 pont	
ahol $n=10,\ k=4,\ p=0,1$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\binom{10}{4}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^6 = 210\cdot 0,1^4\cdot 0,9^6 \approx 0,011$.	1 pont	*Fogadjuk el a választ különböző pontosságú helyes kerekítésekkel.*
Összesen:	**5 pont**	*Jár az 5 pont, ha a konkrét esetet elemezve használ helyes modellt.*