

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2005. május 29.**

# **MATEMATIKA**

## **KÖZÉPSZINTŰ ÉRETTSÉGI VIZSGA**

Az írásbeli vizsga időtartama: 180 perc

## **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**OKTATÁSI MINISZTERIUM**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám** a mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

### Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hiba** esetén, egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. összetevőjének B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

## I.

<b>1.</b>		
$x_1 = -3.$	1 pont	
$x_2 = 3.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>2.</b>		
A háromszög területe $30 \text{ cm}^2$ .	2 pont	<i>Mértékegység nélküli helyes válaszáért 1 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>3.</b>		
A gép értékének 10%-a: $250\,000 \cdot 0,1 = 25\,000$ (Ft). Egy év múlva: $250\,000$ (Ft) – $25\,000$ (Ft). <i>VAGY:</i> Egy év után 90%-ra csökken az érték: $0,9 \cdot 250\,000$ .	2 pont	<i>2 pont a szöveg nélkül is jár.</i>
A gép értéke: $225\,000$ Ft lesz.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4.</b>		
$\sin \alpha = \frac{2}{5}.$ $\alpha \approx 23,58^\circ.$	2 pont	<i>A helyes végeredmény közlése 2 pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>5.</b>		
<b>a)</b>		
	2 pont	<i>Ha nem veszi figyelembe az értelmezési tartományt, akkor csak 1 pont adható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>b)</b>		
A legkisebb függvényérték: $-1$ .	1 pont	<i>A megrajzolt függvény minimum értékének jó meghatározásáért jár 1 pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>1 pont</b>	

<b>6.</b>		
$x = 4.$	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>7.</b>		
$\frac{10}{50}$ vagy $\frac{1}{5}$ vagy 0,2 vagy 20%.	2 pont	<i>Bármilyen formában adja meg a helyes végeredményt, 2 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>8.</b>		
$\alpha_1 = 60^\circ.$	1 pont	
$\alpha_2 = 300^\circ.$	1 pont	<i>Ha <math>\alpha = -60^\circ</math>-ot ír, arra nem jár pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	<i>A radiánban megadott helyes eredményekre is 2 pont jár.</i>

<b>9.</b>		
A helyes válasz betűjele: A.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>10.</b>		
	2 pont	<i>A pontszám nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>11.</b>		
$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 4^2 \cdot \pi \cdot 12.$	2 pont	<i>A térfogat helyes meghatározásáért 3 pont jár. Ha a sugár helyett átmérővel számol, akkor a 3 pontból legfeljebb 2 pontot kaphat.</i>
$V \approx 603 \text{ cm}^3.$	1 pont	
$\frac{1}{2}$ liter = $500 \text{ cm}^3$ , tehát belefér a bögrébe.	1 pont	<i>A helyes válaszra jár az 1 pont, az átváltásnak nem feltétlenül kell szerepelnie.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>12.</b>		
<b>a)</b>		
Egy lap területe $9 \text{ cm}^2$ .	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is megkapja, ha nem ír mértékegységet</i>
A felszín 14 lap területének összege.	1 pont	
$A = 14 \cdot 9 \text{ cm}^2 = 126 \text{ cm}^2$ .	1 pont	<i>Ha a válaszban nem ír mértékegységet, akkor ez az 1 pont nem jár. Ha egy kocka felszínét helyesen kiszámolja, de a kért felszín értékét nem jól határozza meg, akkor összesen 1 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

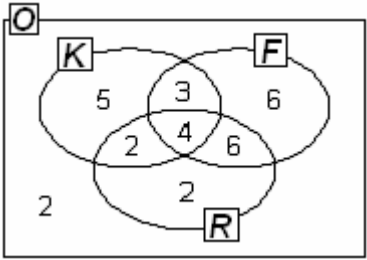
<b>b)</b>		
A keletkező test térfogata $3 \cdot 3^3 \text{ cm}^3 = 81 \text{ cm}^3$ .	1 pont	<i>Mértékegység nélküli válaszáért 0 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>1 pont</b>	

## II./A

<b>13.</b>		
<b>a)</b>		
<b>1. megoldás</b>		
$\left. \begin{array}{l} (1) \ 2x - 6y = 4; \\ (2) \ 3x + 5y = 20. \end{array} \right\}$		
$\begin{array}{l} (1) \ 2x = 4 + 6y. \\ \quad x = 2 + 3y. \end{array}$	1 pont	<i>Az egyik ismeretlen kifejezése 1 pont.</i>
$(2) \ 3(2 + 3y) + 5y = 20.$	1 pont	
$6 + 9y + 5y = 20.$	1 pont	
$y = 1.$	1 pont	<i>A másik ismeretlen meghatározása összesen 3 pont.</i>
$x = 2 + 3y = 5.$	1 pont	
Ellenőrzés. Megoldás: (5; 1).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>2. megoldás</b>		
(1) $2x - 6y = 4;$ (2) $3x + 5y = 20.$		
(1) $10x - 30y = 20;$ (2) $18x + 30y = 120.$	2 pont	<i>Az egyenlő együtthatók kialakításáért összesen 2 pont.</i>
$28x = 140.$	1 pont	<i>Az egyik ismeretlen meghatározásáért összesen 2 pont.</i>
$x = 5.$	1 pont	
$2 \cdot 5 - 6y = 4.$ $y = 1.$	1 pont	<i>A másik ismeretlen meghatározásáért összesen 1 pont.</i>
Ellenőrzés. Megoldás: (5; 1).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>b)</b>		
$\sqrt{x+2} = x$ $x+2 = x^2$ $x^2 - x - 2 = 0$	1 pont	
$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}.$	1 pont	<i>A másodfokú egyenlet helyes megoldásáért összesen 3 pont jár.</i>
$x_1 = 2.$	1 pont	
$x_2 = -1.$	1 pont	
Ellenőrzés: $x_2 = -1$ hamis gyök.	1 pont	
$x_1 = 2$ megoldása az egyenletnek.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>14.</b>		
<b>a)</b>		
	4 pont	<i>Minden helyesen beírt számra 0,5 pontot adjunk, és a végeredményt kerekítsük fel egész pontra.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>b)</b>		
A focira jelentkezettek között van olyan, akinek nincs testvére. VAGY: A focira jelentkezettek közül nem mindenkinek van testvére.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>c)</b>		
Az öt tanulót $\binom{19}{5} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{5!} =$	2 pont	<i>Kevésbé részletes, de helyes számolás esetén is teljes pontszám jár.</i>
$= 11\,628$ -féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>d)</b>		
A mérkőzések száma összesen: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ .	1 pont	<i>Ha az ábra alapján állapítja meg az összes mérkőzés számát, akkor is jár az 1 pont.</i>
Eddig lejátszottak 9 mérkőzést.	1 pont	
6 mérkőzés van még hátra.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	
<i>Ha megrajzolja és megszámolja azokat az éleket, amelyekkel a gráf teljes gráffá egészíthető ki, és jól válaszol, akkor is jár a maximális pont.</i>		

**15.**

<b>a)</b>		
$a_1 = 5$ és $a_2 = 8$ . $d = a_2 - a_1 = 3$ .	1 pont	
$a_{80} = a_1 + 79d$ . $a_{80} = 242$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>b)</b>		
Ha 2005 a sorozat $n$ -edik tagja, akkor $2005 = 5 + (n - 1) \cdot 3$ .	1 pont	
$2000 = (n - 1) \cdot 3$ ,		<i>Ha itt megáll, és arra hivatkozik, hogy 2000 nem osztható 3-mal, tehát a 2005 nem tagja a sorozatnak, akkor is jár a 3 pont.</i>
azaz $\frac{2003}{3} = n$ .	1 pont	
Mivel $\frac{2003}{3} \notin \mathbf{N}^+$ , a 2005 nem tagja a sorozatnak.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>c)</b>		
Az első $n$ tag összege: $S_n = \frac{5 + 5 + (n - 1) \cdot 3}{2} \cdot n = 1550$ .	2 pont	
Ebből $(10 + 3n - 3) \cdot n = 3100$ , azaz $3n^2 + 7n - 3100 = 0$ .	1 pont	

$n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 37200}}{6},$		
$n_1 = 31,$	1 pont	
$n_2 = \frac{-200}{6}.$	1 pont	
Mivel $n_2 \notin \mathbf{N}^+, n_1 = 31$ lehet csak a válasz.	1 pont	<i>Ha nem jelzi, hogy <math>n_2 \notin \mathbf{N}^+,</math> de helyesen választja ki az <math>n</math> értékét, akkor is jár az 1 pont.</i>
Ellenőrzés: $\frac{10 + 30 \cdot 3}{2} \cdot 31 = 1550,$ tehát 31 tagot kell összeadni.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

### B

**A 16–18. feladatok közül a tanuló által megjelölt feladatot nem kell értékelni.**

<b>16.</b>		
<b>a)</b>		
$\vec{AC}(-8; -8)$ $AC =  \vec{AC}  = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8 \cdot \sqrt{2} \approx 11,31$	2 pont	<i>A helyes válaszért jár a 2 pont, bármilyen alakban is adja meg.</i>
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>b)</b>		
$\vec{AB} = \underline{v}(-11; -5).$ $\underline{n}(-5; 11).$ $m = \frac{5}{11}.$	2 pont	<i>A <math>\underline{v}, \underline{n}</math> vagy <math>m</math> meghatározására jár a 2 pont.</i>
Az $AB$ egyenes egyenlete: $-5x + 11y = 69,$ vagy $y = \frac{5}{11}x + \frac{69}{11}.$	2 pont	<i>Az egyenes egyenletének bármilyen alakban történő helyes felírásáért jár a 2 pont.</i>
<b>Összesen:</b>		<b>4 pont</b>



<b>c)</b>		
<b>1. megoldás</b>		
$\vec{CB}(-3; 3)$ .	1 pont	
$\vec{CA}(8; 8)$ .	1 pont	
A vektorok skaláris szorzata: $\vec{CB} \cdot \vec{CA} = -3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 = 0$ .	2 pont	
Mivel a két vektor skaláris szorzata 0, a két vektor merőleges egymásra, azaz a C csúcsnál derékszög van.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>2. megoldás</b>		
$\vec{CA}(8; 8)$ ; $ \vec{CA}  = CA = \sqrt{128} \approx 11,31$ . (*)		
$\vec{BC}(3; -3)$ ; $ \vec{BC}  = BC = \sqrt{18} \approx 4,24$ .	1 pont	
$\vec{AB}(-11; -5)$ ; $ \vec{AB}  = AB = \sqrt{146} \approx 12,08$ .	1 pont	
Mivel $146 = 128 + 18$ , azaz $AB^2 = CA^2 + BC^2$ ,	2 pont	
így a Pitagorasz tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	
(*) $A \vec{CA}$ vektor hosszának kiszámításáért az <b>a)</b> részben jár a 2 pont.		

<b>3. megoldás</b>		
$m_{CB} = -1$ .	1 pont	
$m_{CA} = 1$ .	1 pont	
$m_{CB} \cdot m_{CA} = -1$ , azaz a	2 pont	
$CB$ és $CA$ oldalegyenesek merőlegesek egymásra, tehát a háromszög $C$ csúcsánál derékszög van.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>d)</b>		
Mivel derékszögű a háromszög, Thalész tétele alapján a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó fele.	1 pont	<i>A kör középpontjának jó meghatározására kap összesen 3 pontot, az előtte lévő magyarázó szöveg nélkül is.</i>
$F(0,5; 6,5)$ .	2 pont	
A kör sugara: $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{146}}{2} \approx 6,04$ .	1 pont	<i>Közelítő érték is elfogadható.</i>
A kör egyenlete: $(x - 0,5)^2 + (y - 6,5)^2 = 36,5$ .	1 pont	<i>Ha a sugár közelítő értékével számol, akkor is jár az 1 pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>17.</b>		
<b>a)</b>		
40 km.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>b)</b>		
2,7 óra.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>c)</b>		
	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>d)</b>		
<b>1. megoldás</b>		
A tehervonat menetideje a találkozásig $x$ óra.	1 pont	<i>Arra jár az 1 pont, hogy megnevezi, hogy mit jelöl <math>x</math>-szel. Ha ez a mondat hiányzik, de a megoldás végén a válaszból kiderül, hogy mit jelölt az ismeretlennel, akkor is jár az 1 pont. Ha nem ír mértékegységet, akkor is jár az 1 pont.</i>
A gyorsvonat menetideje a találkozásig $(x - 0,5)$ óra.	1 pont	<i>Ha nem ír mértékegységet, akkor is jár az 1 pont.</i>
A két vonat megtett útja azonos: $40x = 70(x - 0,5)$ .	3 pont	<i>A helyes egyenlet felírásáért összesen 5 pont jár.</i>
$40x = 70x - 35$ . $30x = 35$ . $x = \frac{35}{30} = 1\frac{10}{60}$ .	2 pont	<i>Az ismeretlen meghatározásáért jár a 2 pont.</i>
Tehát a két vonat 8 óra 10 perckor találkozik.	1 pont	

$40 \cdot \frac{35}{30} = \frac{140}{3} \approx 46,7.$	1 pont	
A gyorsvonat kb. 46,7 km út megtétele után éri utol a tehervonatot.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	
<i>Ha a grafikonról olvassa le az eredményeket, és semmi további indoklást, számolást nem fűz hozzá, akkor maximum 2 pontot kaphat.</i>		

<b>2. megoldás</b>		
A tehervonat 0,5 óra alatt 20 km-t tesz meg.	1 pont	
A gyorsvonat 1 óra alatt 30 km-rel tesz meg többet, mint a tehervonat, azaz percenként 0,5 km-t hoz be a hátrányából.	3 pont	
A tehervonat 20 km-es előnyét a gyorsvonat 40 perc alatt hozza be,	2 pont	
tehát 8 óra 10 perckor éri utol.	2 pont	
$70 \cdot \frac{2}{3} = \frac{140}{3} \approx 46,7.$	1 pont	
A gyorsvonat kb. 46,7 km úton éri utol a tehervonatot.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	

<b>18.</b>		
<b>a)</b>		
$4! = 24$	2 pont	<i>Bármelyik formában megadott helyes eredményért jár a 2 pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>b)</b>		
Anna és Béla egymás mellett ülnek, ezért egy „elemnek” tekinthetjük őket, azaz 3 elemet kell permutálnunk: $3!$ .	2 pont	<i>Ha az összes eset felsorolásával kapja meg a jó megoldást, akkor is jár a teljes pontszám.</i>
Anna és Béla bármelyik fenti sorrendben helyet cserélhetnek egymással, ezért azon esetek száma, amikor Anna és Béla egymás mellett ülnek: $3! \cdot 2 = 12.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>c)</b>		
$\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{2 \cdot 3!}{4!}.$	3 pont	
A kért valószínűség: $\frac{2}{4}$ vagy 0,5 vagy 50%.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>d)</b>		
A megadott százaléértékeknek megfelelő szögek: 800Ft, 40%: 144°, 1000 Ft, 25%: 90°, 1200 Ft, 20%: 72°, 1500 Ft, 15%: 54°.	1 pont	
	2 pont	<p><i>Ha a kördiagramról nem derül ki, hogy melyik százaléérték vagy melyik jegyár melyik körcikkhez tartozik, akkor csak 1 pont jár.</i></p> <p><i>Akkor fogadható el az ábra, ha a bejelölt határvonal a helyes megoldás tízes szomszédai közé esik</i></p>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>e)</b>		
Kiszámolható, hogy a különböző árú jegyekből hány darab fogyott: 480 db – 800 Ft-os jegy; 300 db – 1000 Ft-os jegy; 240 db – 1200 Ft-os jegy; 180 db – 1500 Ft-os jegy.	2 pont	<i>Ha 2 vagy 3 értéket jól kiszámol, akkor 1 pont jár.</i>
$\frac{480 \cdot 800 + 300 \cdot 1000 + 240 \cdot 1200 + 180 \cdot 1500}{1200} =$ $= 1035$	2 pont	
Az átlagár tehát 1035 Ft.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	