

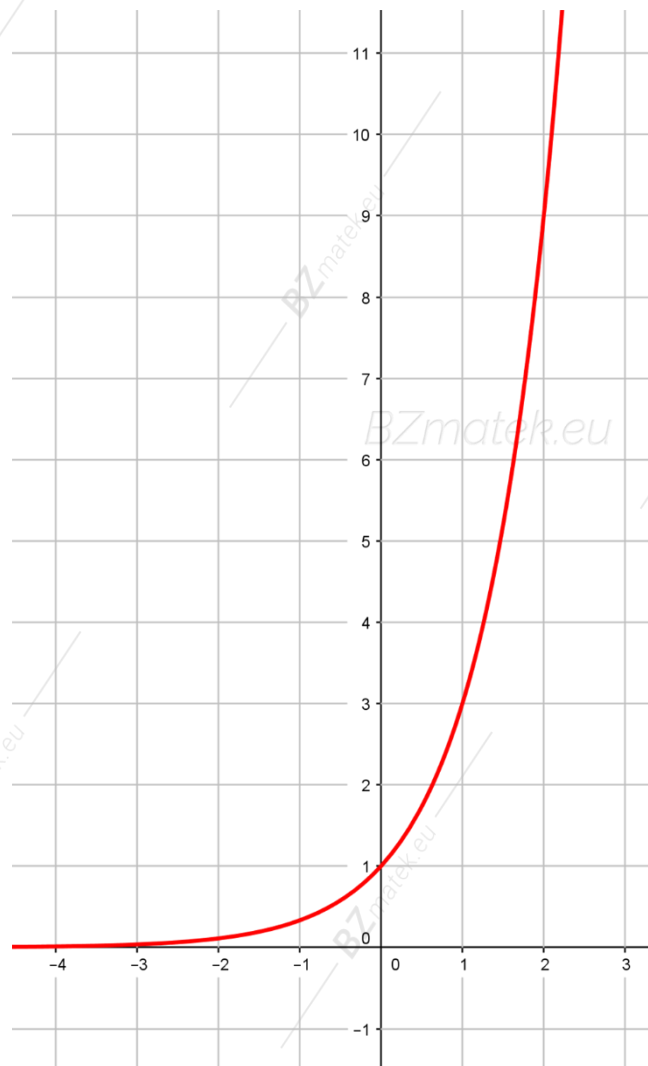
## Exponenciális - , logaritmus - , inverz függvények

### DEFINÍCIÓ: (Exponenciális függvény)

Ha  $a$  adott pozitív valós szám ( $a > 0; a \in \mathbb{R}$ ), akkor az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto a^x$  függvényt  $a$  alapú exponenciális függvénynek nevezzük.

### Megjegyzés:

- Az exponenciális függvényben a változó a kitevőben szerepel és az alap egy pozitív szám.
- Ha  $a > 1$ , akkor a függvény szigorúan monoton növekvő.
- Ha  $0 < a < 1$ , akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő.
- Ha  $a = 1$ , akkor a függvény konstans ( $x \mapsto 1^x$ ).



Exponenciális függvény:  $f(x) = 3^x$

Az ábráról leolvashatjuk a függvény tulajdonságait:

	$f(x) = 3^x$		
<b>Értelmezési tartomány:</b>	$D_f: x \in \mathbb{R}$		
<b>Értékkészlet:</b>	$R_f: y \in ]0; +\infty[$		
<b>Periodicitás:</b>	Nem periodikus.		
<b>Zérushely:</b>	Nincs zérushelye.		
<b>Monotonitás:</b>	<b>Szigorúan monoton csökkenő:</b>	Nincs ilyen intervallum.	
	<b>Szigorúan monoton növekvő:</b>	$x \in ]-\infty; +\infty[$	
<b>Szélsőérték:</b>	<b>Minimum:</b>	<b>Helye:</b>	Nincs minimuma.
		<b>Értéke:</b>	Nincs minimuma.
	<b>Maximum:</b>	<b>Helye:</b>	Nincs maximuma.
		<b>Értéke:</b>	Nincs maximuma.
<b>Korlátosság:</b>	<b>Pontos alsó korlát:</b>	$k = 0$	
	<b>Pontos felső korlát:</b>	Nincs felső korlátja.	
		Nem korlátos függvény.	
<b>Paritás:</b>	Nem páros, nem páratlan függvény.		



Exponenciális függvény:  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Az ábráról leolvashatjuk a függvény tulajdonságait:

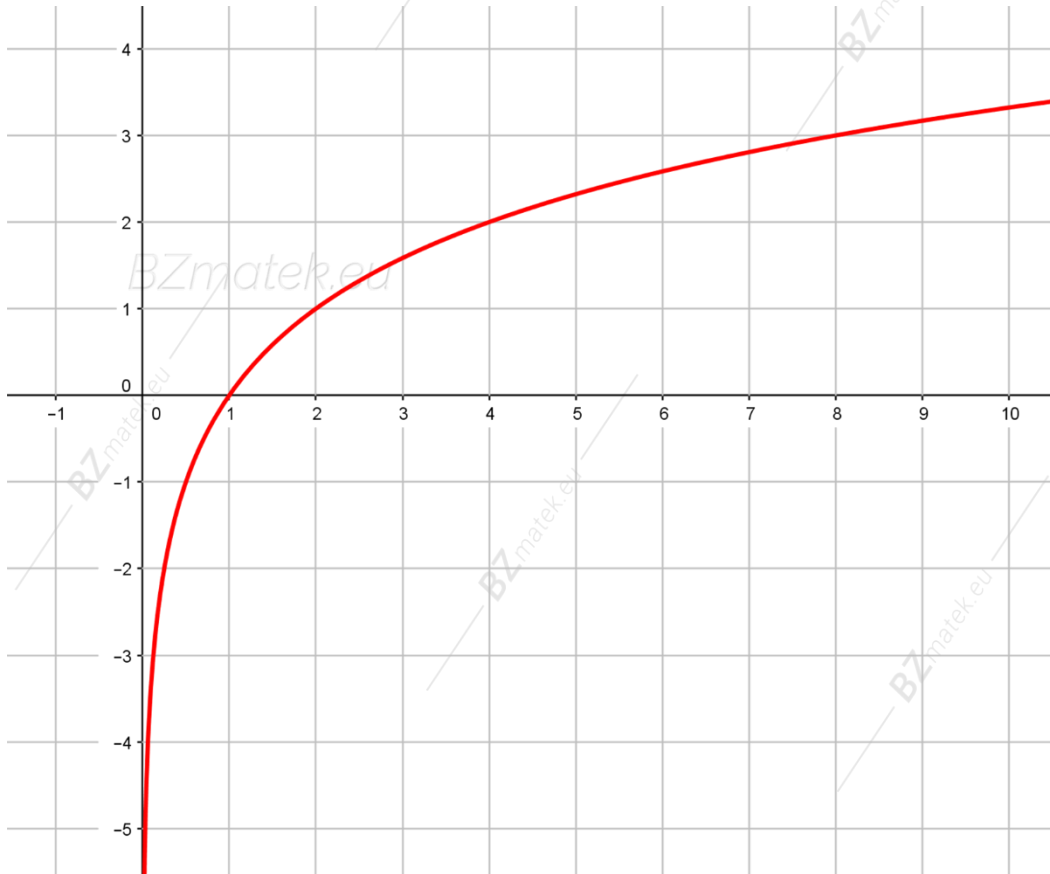
	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$		
<b>Értelmezési tartomány:</b>	$D_f: x \in \mathbb{R}$		
<b>Értékkészlet:</b>	$R_f: y \in ]0; +\infty[$		
<b>Periodicitás:</b>	Nem periodikus.		
<b>Zérushely:</b>	Nincs zérushelye.		
<b>Monotonitás:</b>	<b>Szigorúan monoton csökkenő:</b>	$x \in ]-\infty; +\infty[$	
	<b>Szigorúan monoton növekvő:</b>	Nincs ilyen intervallum.	
<b>Szélsőérték:</b>	<b>Minimum:</b>	<b>Helye:</b>	Nincs minimuma.
		<b>Értéke:</b>	Nincs minimuma.
	<b>Maximum:</b>	<b>Helye:</b>	Nincs maximuma.
		<b>Értéke:</b>	Nincs maximuma.
<b>Korlátosság:</b>	<b>Pontos alsó korlát:</b>	$k = 0$	
	<b>Pontos felső korlát:</b>	Nincs felső korlátja.	
		Nem korlátos függvény.	
<b>Paritás:</b>	Nem páros, nem páratlan függvény.		

**DEFINÍCIÓ: (Logaritmus függvény)**

Ha az  $a$  egy  $1$  – től különböző pozitív valós szám, akkor az  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log_a x$  függvényt  $a$  alapú logaritmus függvénynek nevezzük.

Megjegyzés:

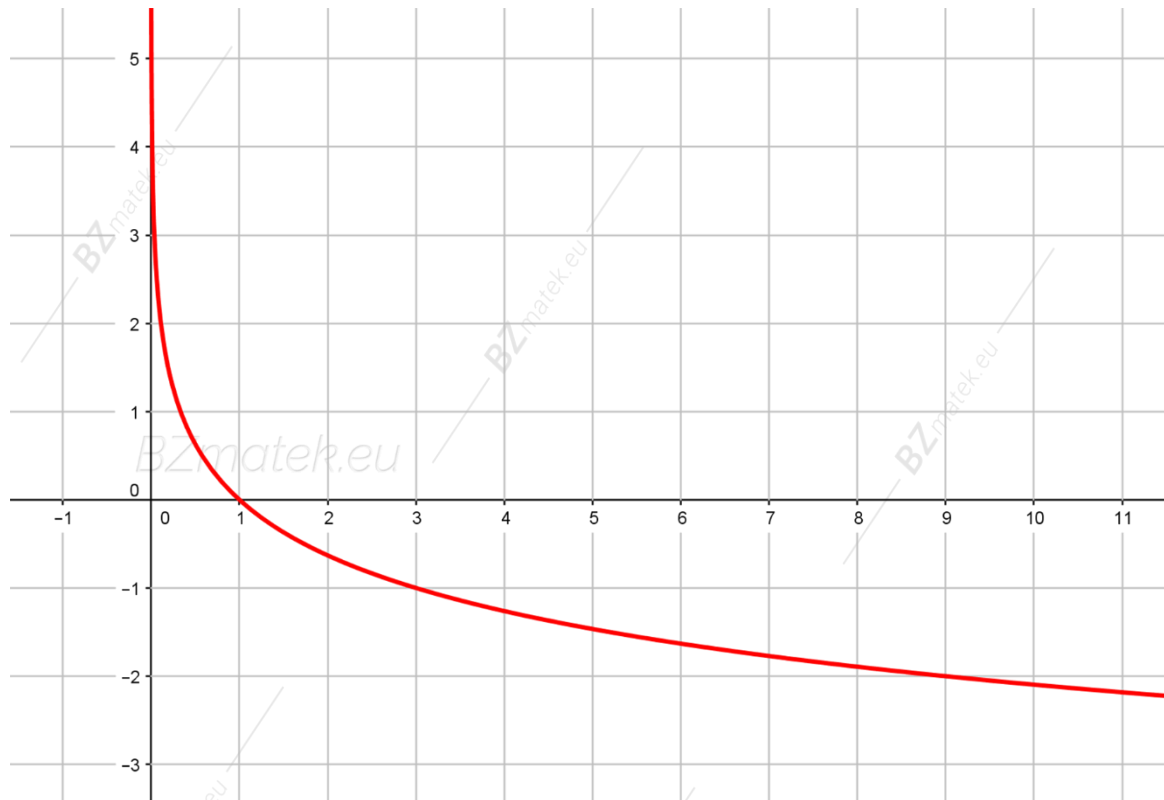
- Ha  $a > 1$ , akkor a függvény szigorúan monoton növekvő.
- Ha  $0 < a < 1$ , akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő.



Logaritmus függvény:  $f(x) = \log_2 x$

Az ábráról leolvashatjuk a függvény tulajdonságait:

	$f(x) = \log_2 x$		
<b>Értelmezési tartomány:</b>	$D_f: x \in ]0; +\infty[$		
<b>Értékkészlet:</b>	$R_f: y \in \mathbb{R}$		
<b>Periodicitás:</b>	Nem periodikus.		
<b>Zérushely:</b>	$x = 1$		
<b>Monotonitás:</b>	<b>Szigorúan monoton csökkenő:</b>	Nincs ilyen intervallum.	
	<b>Szigorúan monoton növekvő:</b>	$x \in ]0; +\infty[$	
<b>Szélsőérték:</b>	<b>Minimum:</b>	<b>Helye:</b>	Nincs minimuma.
		<b>Értéke:</b>	Nincs minimuma.
	<b>Maximum:</b>	<b>Helye:</b>	Nincs maximuma.
		<b>Értéke:</b>	Nincs maximuma.
<b>Korlátosság:</b>	<b>Pontos alsó korlát:</b>	Nincs alsó korlátja.	
	<b>Pontos felső korlát:</b>	Nincs felső korlátja.	
		Nem korlátos függvény.	
<b>Paritás:</b>	Nem páros, nem páratlan függvény.		



Logaritmus függvény:  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Az ábráról leolvashatjuk a függvény tulajdonságait:

	$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$		
<b>Értelmezési tartomány:</b>	$D_f: x \in ]0; +\infty[$		
<b>Értékkészlet:</b>	$R_f: y \in \mathbb{R}$		
<b>Periodicitás:</b>	Nem periodikus.		
<b>Zérushely:</b>	$x = 1$		
<b>Monotonitás:</b>	<b>Szigorúan monoton csökkenő:</b>	$x \in ]0; +\infty[$	
	<b>Szigorúan monoton növekvő:</b>	Nincs ilyen intervallum.	
<b>Szélsőérték:</b>	<b>Minimum:</b>	<b>Helye:</b>	Nincs minimuma.
		<b>Értéke:</b>	Nincs minimuma.
	<b>Maximum:</b>	<b>Helye:</b>	Nincs maximuma.
		<b>Értéke:</b>	Nincs maximuma.
<b>Korlátosság:</b>	<b>Pontos alsó korlát:</b>	Nincs alsó korlátja.	
	<b>Pontos felső korlát:</b>	Nincs felső korlátja.	
		Nem korlátos függvény.	
<b>Paritás:</b>	Nem páros, nem páratlan függvény.		



### **DEFINÍCIÓ: (Inverz függvény)**

Egy  $f$  függvény inverze a  $g$  függvény, ha az  $f$  kölcsönösen egyértelmű és bármely értelmezési tartománybeli  $x$  elemére  $g(f(x)) = x$  teljesül. Jelölés:  $g(x) = f^{-1}(x)$ .

#### Megjegyzés:

- Csak a kölcsönösen egyértelmű függvényeknek van inverze, s ezeket invertálható függvényeknek nevezzük.
- A függvény értelmezési tartománya megegyezik az inverzének értékészletével (és fordítva).
- Az inverz függvények megfordítják a hozzárendelés irányát: az egymáshoz rendelt értékek ugyanazok, de a megfeleltetés iránya ellentétes.
- Egy függvény és inverze tükrös az  $y = x$  egyenletű egyenesre, mert a két függvéynél a tengelyek felcserélődnek, továbbá a két függvény ugyanolyan értelemben monoton.
- A függvény inverzének hozzárendelési szabályát úgy határozhatjuk meg, hogy felcseréljük a változót ( $x$  - et) a függvényértékkel ( $y$  - nal) és az új egyenletből kifejezzük az  $y$  - t.

#### Szögfüggvények inverze:

- A szinusz függvény a  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  intervallumon szigorúan monoton növekvő. Ennek inverze az arkusz – szinusz függvény. Jele:  $\text{arc sin } x$ .
- A koszinusz függvény a  $0 \leq x \leq \pi$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő. Ennek inverze az arkusz – koszinusz függvény. Jele:  $\text{arc cos } x$ .
- A tangens függvény a  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  intervallumon szigorúan monoton növekvő. Ennek inverze az arkusz – tangens függvény. Jele:  $\text{arc tg } x$ .
- A kotangens függvény a  $0 < x < \pi$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő. Ennek inverze az arkusz – kotangens függvény. Jele:  $\text{arc ctg } x$ .

#### Hatványfüggvények inverzei:

Az  $f(x) = x^n$  függvény inverze:

- Ha  $n$  pozitív páratlan egész, akkor  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ .
- Ha  $n$  pozitív páros egész és  $x \in [0; +\infty[$  akkor  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ .
- Ha  $n$  pozitív páros egész és  $x \in ]-\infty; 0]$  akkor  $f^{-1}(x) = -\sqrt[n]{x}$ .

## Függvénytranszformációk

Az egyes függvénytípusokhoz tartozó függvényeken bizonyos fajta átalakításokat végezve a típus nem változik meg. Ha egy koordináta – rendszerben ábrázolt függvény grafikonját valamelyik tengely irányában eltoljuk, megnyújtjuk vagy összezsugorítjuk, akkor azt mondjuk, hogy függvénytranszformációt hajtottunk végre.

### Változó transzformációk (x koordináták változtatása):

- $f(-x)$ : az  $y$  tengelyre való tükrözés
- $f(x + c)$ : az  $x$  tengely mentén  $(-c)$  – vel való eltolás
- $f(b \cdot x)$ : az  $y$  tengelyre merőleges irányban zsugorítás / nyújtás  
(az  $x$  koordinátákat  $\frac{1}{b}$  - szorosára változtatjuk, az  $y$  koordinátákat nem változtatjuk)
- $f(|x|)$ : az  $x \geq 0$  értékekhez tartozó görbét tükrözzük az  $y$  tengelyre  
(az  $x < 0$  értékekhez tartozó görbét elhagyjuk)

### Érték transzformációk (y koordináták változtatása):

- $-f(x)$ : az  $x$  tengelyre való tükrözés
- $f(x) + d$ : az  $y$  tengely mentén  $(+d)$  – vel való eltolás
- $a \cdot f(x)$ : az  $x$  tengelyre merőleges irányban zsugorítás / nyújtás  
(az  $y$  koordinátákat  $a$  – szorosára változtatjuk, az  $x$  koordinátákat nem változtatjuk)
- $|f(x)|$ : az  $y < 0$  értékekhez tartozó görbét tükrözzük az  $x$  tengelyre

### Transzformációk sorrendje:

Először a változó transzformációkat, majd az érték transzformációkat végezzük el.

1.  $f(x)$
2.  $f(x + c)$
3.  $f(b \cdot x + c)$
4.  $f(-b \cdot x + c)$
5.  $a \cdot f(-b \cdot x + c)$
6.  $-a \cdot f(-b \cdot x + c)$
7.  $-a \cdot f(-b \cdot x + c) + d$

## Gyakorló feladatok

**K:** középszintű feladat

**E:** emelt szintű feladat

1. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$ !
2. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = 2^x - 4$ !
3. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = 3^{\frac{1}{2}x}$ !
4. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ !
5. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = -2^{x-3} + 1$ !
6. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+6} - 2$ !
7. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 3$ !
8. (E) Ábrázold a következő függvényt:  $f(x) = 2 \cdot 3^{2x-1} + 1$ !
9. (E) Ábrázold a következő függvényt:  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$ !
10. (E) Ábrázold a következő függvényt:  $f(x) = 2^{|x+1|}$ !

11. (K) Ábrázold az  $f(x) = 2^x - 7$  függvényt az  $x \in ]-1; 3]$  intervallumon! Jellemezd a függvényt értékkészlet, szélsőérték, illetve korlátosság szempontjából!
12. (K) Adott az  $f(x) = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} + 1$  függvény. Melyik a nagyobb:  $f(-1)$  vagy  $f(2)$ ?
13. (K) Adott az  $f(x) = 5^{2x} - 30$  függvény. Számítsd ki az  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ; a  $-f(-2)$  és az  $|f(1)|$  értékek átlagát!
14. (K) Adott az  $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$  függvény. Számítsd ki a következő kifejezés értékét:  $f(-5) - f(-3) - f(4)$ !
15. (K) Adott az  $f(x) = 2^{x+8} - 3$  függvény. Számítsd ki a  $-5$  helyen felvett helyettesítési értéket!
16. (K) Adott az  $f(x) = 3^{4-x}$  függvény. Számítsd ki a  $7$  helyen felvett helyettesítési érték ellentettjét!
17. (K) Adott az  $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} - 5$  függvény. Számítsd ki a  $8$  helyen felvett helyettesítési érték abszolútértékét!
18. (K) Adott az  $f(x) = 3 \cdot 4^{7x}$  függvény. Hol veszi fel a függvény a  $-9$  és a  $6$  értéket?
19. (K) Döntsd el, hogy rajta van - e a  $P(2; 6)$  pont az  $f(x) = 6^x - 7$ , illetve a  $g(x) = 3^x - 3$  függvény grafikonján!
20. (K) Add meg ábrázolás nélkül az  $f(x) = 7^{1-x}$  függvény három különböző pontját!

21. (K) Határozd meg a  $P(x; 1)$  pont koordinátáit úgy, hogy illeszkedjen az  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$  függvény grafikonjára!
22. (K) Határozd meg a  $P(-1; y)$  pont koordinátáit úgy, hogy illeszkedjen az  $f(x) = 2 \cdot 3^{x+1} - 4$  függvény grafikonjára!
23. (K) Határozd meg ábrázolás nélkül az  $f(x) = 5^x + 3$  és a  $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$  függvény zérushelyeit!
24. (K) Határozd meg ábrázolás nélkül, hogy hol metszi az  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+2} - 16$  függvény a koordináta – tengelyeket!
25. (K) Írd fel annak a  $g(x)$  függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelyet úgy kapunk, hogy az  $f(x) = 8^{4x}$  függvényt eltoljuk az adott  $\vec{v}(-3; 20)$  vektorral!
26. (K) Írd fel annak a  $g(x)$  függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelyet úgy kapunk, hogy az  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-6} + 4$  függvényt eltoljuk az adott  $\vec{v}(8; -7)$  vektorral!
27. (K) Add meg annak az  $f(x)$  függvénynek a hozzárendelési szabályát, amely pontjait eltolva az adott  $\vec{v}(2; 15)$  vektorral a  $g(x) = 13^{x+4} - 6$  függvény adódik!
28. (K) Add meg annak a  $\vec{v}$  vektornak a koordinátáit, amellyel eltolva az  $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+8}$  függvény pontjait a  $g(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+11} - 29$  függvény adódik!
29. (K) Add meg az  $a$  értékét, ha  $f(x) = a^x$  függvény szigorúan monoton csökkenő! Van – e olyan  $a$  érték, amely esetén a hozzárendelés képe egy konstans függvény lesz?

30. (K) Határozd meg az  $f(x) = a^x$  exponenciális függvényben az  $a$  értéket, ha tudjuk, hogy a függvény 5 – höz 16807 – et rendel!
31. (K) Határozd meg az  $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x + b$  exponenciális függvényben a  $b$  értéket, ha tudjuk, hogy a függvény a 10 pontban metszi az  $y$  - tengelyt!
32. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = \log_4(x + 3)!$
33. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = \log_3(3x)!$
34. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}x - 4!$
35. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = -2 \cdot \log_2(x)!$
36. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 4) + 2!$
37. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(\frac{1}{2}x\right) - 3!$
38. (K) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:  $f(x) = -3 \cdot \log_3(x + 1) + 6!$
39. (E) Ábrázold a következő függvényt:  $f(x) = -\log_2\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 2!$
40. (E) Ábrázold a következő függvényt:  $f(x) = 3 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2 - x) + 1!$
41. (E) Ábrázold a következő függvényt:  $f(x) = |\log_3(2x)|!$

42. (K) **Ábrázold az  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 6)$  függvényt az  $x \in ]-4; 2]$  intervallumon! Jellemezd a függvény értékkészlet, szélsőérték, illetve korlátosság szempontjából!**
43. (K) **Adott az  $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{4}}(7 - x) - 8$  függvény. Melyik a nagyobb:  $f(-9)$  vagy  $f(6)$ ?**
44. (K) **Adott az  $f(x) = -4 \cdot \log_5(3x + 9)$  függvény. Számítsd ki az  $f\left(-\frac{44}{15}\right)$ ; a  $-f\left(-\frac{8}{3}\right)$  és az  $\left|f\left(-\frac{4}{3}\right)\right|$  értékek átlagát!**
45. (K) **Adott az  $f(x) = -\log_6\left(\frac{1}{2}x + 4\right)$  függvény. Számítsd ki a következő kifejezés értékét:  $f\left(-\frac{23}{3}\right) - f(4) - f(-6)$ !**
46. (K) **Adott az  $f(x) = \log_5(2x + 11)$  függvény. Számítsd ki a 57 helyen felvett helyettesítési értéket!**
47. (K) **Adott az  $f(x) = 5 \cdot \log_2(x - 12)$  függvény. Számítsd ki a 20 helyen felvett helyettesítési érték ellentettjét!**
48. (K) **Adott az  $f(x) = \log_4(x - 3)$  függvény. Számítsd ki a  $\frac{49}{16}$  helyen felvett helyettesítési érték abszolútértékét!**
49. (K) **Adott az  $f(x) = -\log_3(x - 1)$  függvény. Hol veszi fel a függvény a  $-5$  és a  $8$  értéket?**
50. (K) **Döntsd el, hogy rajta van - e a  $P(1022; 30)$  pont az  $f(x) = 3 \cdot \log_2(x + 2)$ , illetve a  $g(x) = 6 \cdot \log_8(x - 510)$  függvény grafikonján!**

51. (K) Add meg ábrázolás nélkül az  $f(x) = \log_9(x + 10) - 8$  függvény három különböző pontját!
52. (K) Határozd meg a  $P(x; 2)$  pont koordinátáit úgy, hogy illeszkedjen az  $f(x) = \log_7(8x - 9)$  függvény grafikonjára!
53. (K) Határozd meg a  $P(3; y)$  pont koordinátáit úgy, hogy illeszkedjen az  $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}x + 4$  függvény grafikonjára!
54. (K) Határozd meg az  $f(x) = \log_4(x - 1)$  és a  $g(x) = -2 \cdot \log_9(x + 3) + 1$  függvény zérushelyeit ábrázolás nélkül!
55. (K) Határozd meg ábrázolás nélkül, hogy hol metszi az  $f(x) = -5 \cdot \log_6(x + 6) + 3$  függvény a koordináta – tengelyeket!
56. (K) Írd fel annak a  $g(x)$  függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelyet úgy kapunk, hogy az  $f(x) = -9 \cdot \log_{\frac{4}{3}}x$  függvényt eltoljuk az adott  $\vec{v}(7; 10)$  vektorral!
57. (K) Írd fel annak a  $g(x)$  függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelyet úgy kapunk, hogy az  $f(x) = \log_8(x + 9) - 10$  függvényt eltoljuk az adott  $\vec{v}(-5; -6)$  vektorral!
58. (K) Add meg annak az  $f(x)$  függvénynek a hozzárendelési szabályát, amely pontjait eltolva az adott  $\vec{v}(-8; 21)$  vektorral a  $g(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x - 4)$  függvény adódik!
59. (K) Add meg annak a  $\vec{v}$  vektornak a koordinátáit, amellyel eltolva az  $f(x) = \log_6(x - 7) + 8$  függvény pontjait a  $g(x) = \log_6(x - 9) + 3$  függvény adódik!
60. (K) Add meg az  $a$  értékét, ha  $f(x) = \log_a x$  függvény szigorúan monoton növekvő!



61. (K) Határozd meg az  $f(x) = \log_a x$  exponenciális függvényben az  $a$  értéket, ha tudjuk, hogy a függvény 81 – hez 4 – et rendel!

62. (K) Határozd meg az  $f(x) = \log_{13}(x + b)$  exponenciális függvényben a  $b$  értéket, ha tudjuk, hogy a függvény a 26 pontban metszi az  $x$  - tengelyt!

63. (K) Oldd meg grafikusán a következő egyenleteket!

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 6$

b)  $3^x = \sqrt{x} + 2$

c)  $\log_2(x + 4) - 1 = -|x - 1| + 5$

d)  $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + 1 = (x - 1)^2 - 3$

64. (K) Oldd meg grafikusán a következő egyenlőtlenségeket!

a)  $\log_3 x \leq -\frac{2}{3}x + 3$

b)  $\log_{\frac{1}{2}} x < -(x + 1)^2 - 2$

c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 3 < |x + 2| + 1$

d)  $2^x + 1 \geq -2$

65. (E) Határozd meg a következő függvények értelmezési tartományát!

$f(x) = |\log_3(x)|$

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}}|x|$

$h(x) = \lg(2^x - 4)$

$i(x) = \log_5\left(\log_{\frac{5}{3}}\frac{5}{x}\right)$

$j(x) = \sqrt{\lg(1 - \sin^2 x)}$

$k(x) = \frac{11}{\sqrt{7^x - 1}}$

$l(x) = 8^{\sin(x)}$

$m(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$

$n(x) = \log_6(9 - x^2)$

66. (E) Határozd meg az  $f \circ g$  és  $g \circ f$  összetett függvényeket, ha  $f(x) = 2^x$  és  $g(x) = -5x + 3$ !

67. (E) Határozd meg az  $f \circ g \circ h$  és  $h \circ g \circ f$  összetett függvényeket, ha  $f(x) = |x|$ ;  $g(x) = \frac{1}{x} + 1$  és  $h(x) = x - 2$ !

68. (E) Határozd meg az  $f(x) = \sqrt{x}$  és  $g(x) = x^2 - 4$  függvényekből képezett  $F(x) = f(g(x))$  és  $G(x) = g(f(x))$  összetett függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! Add meg a függvények hozzárendelési szabályát is!

69. (E) Készítsd el a függvényekből az összes lehetséges  $F(x) = f(g(x))$  összetett függvényt. Add meg mind a hat összetett függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

$$y = \cos(x)$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = x - \pi$$

70. (E) Határozd meg a következő függvények inverzeit!

a)  $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$

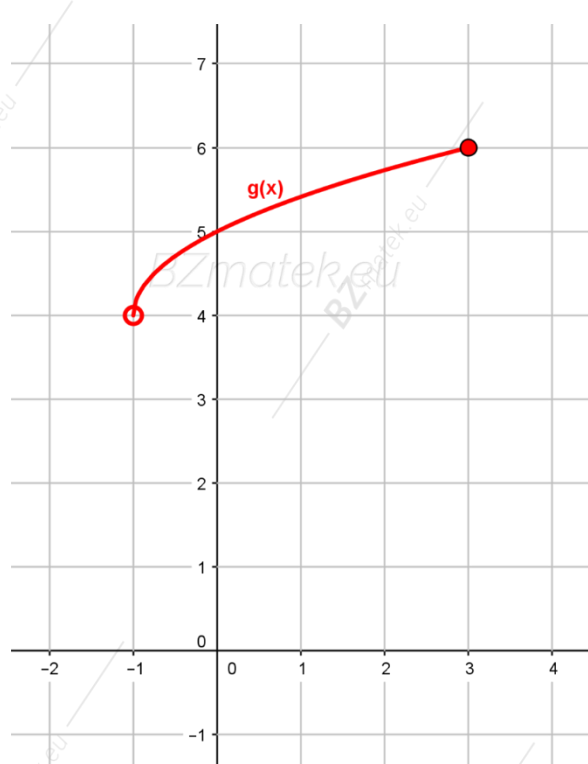
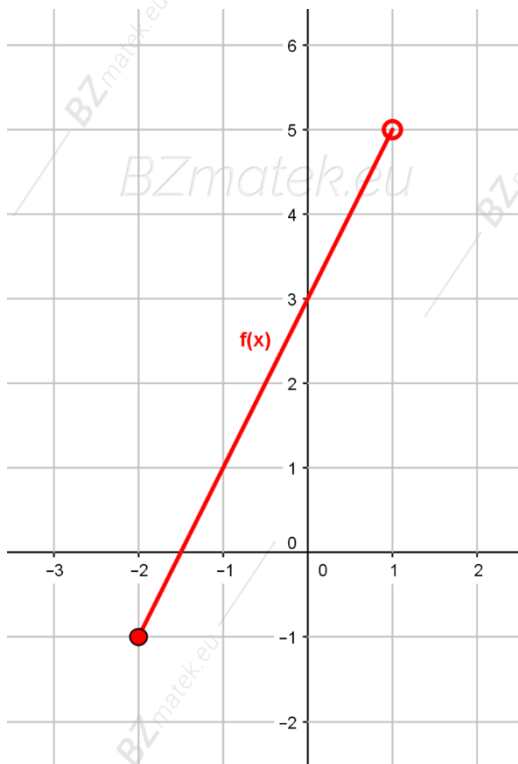
b)  $g(x) = 4^{\frac{x-1}{7}}$

c)  $h(x) = 3x - 4$

d)  $i(x) = \sqrt[3]{x + 2}$ ;

e)  $j(x) = x^2$

71. (E) Jellemezd a függvények inverzét a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás és zérushely!



72. (E) Ábrázold a szögfüggvények inverzeit!

## **Felhasznált irodalom**

- (1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2011.; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (9) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (13) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (14) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

- (15) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (21) [https://users.itk.ppke.hu/itk\\_dekani/files/matematika/list.html](https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html)
- (22) Saját anyagok