Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Exponenciális folyamatokat leíró szöveges feladatok

Szöveges feladatok megoldása:

- A szöveg alapján, vagy az adott képlet segítségével (adatok behelyettesítésével) írjunk fel egy exponenciális, illetve logaritmusos egyenletet (egyenlőtlenséget).
- Ezt követően oldjuk meg a tanult módszerekkel a kapott egyenletet.
- Végül ellenőrizzük le a megoldást és válaszoljunk a kérdésre.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) A Föld népessége évente $1,48$ % - kal növekszik, 2001 – ben $6,2$ milliárd ember élt a Földön.**

   a) **Mennyi év múlva lesz 8 milliárd ember a Földön ilyen növekedési ütem mellett?**

   b) **Mennyi évvel ezelőtt volt 5 miliárd ember a Földön?**

   c) **Mennyi ember lesz a Földön 2010 – ben?**

2. **(K) 1650 – ben a Föld népessége kb. 500 millió volt, és évente átlagosan $0,3$ % - kal nőtt. Ezek alapján mennyi ember élt a Földön 1750 – ben, illetve mennyire becsülhető változatlan növekedési ütem mellett a 2000. évi létszám?**

3. **(K) Egy város lakóinak száma $30\,000$ fő. Mennyi év alatt lesz $35\,000$ fő a lakosok száma, ha évente átlagosan $0,5$ % - kal gyarapszik a lakosság?**

4. **(K) Mennyi év alatt gyarapszik $1,5$ – szeresére egy erdő faállománya, ha az állomány évi gyarapodása 2 % - os?**

5. **(K) Egy préselőgép első nyomásra a répában levő lé negyedrészét, majd minden további nyomásra a megmaradt lé negyedrészét nyomja ki. Mennyi nyomás szükséges ahhoz, hogy a répában levő lének legalább $\frac{2}{3}$ - részét kinyomja a gép?**

6. **(K) Gyuri szeretné megvenni azt a biciklit, amit $65\,000\,Ft$ – ért látott. Van már $40\,000\,Ft$ – ja. Mennyi idő múlva vehetné meg a gépet, ha ezt az összeget befektetné évi 14 % - os kamatra? (Ha annak közben nem változna meg az ára.)**

7. **(K) Takarékba betett pénzünk 5 év alatt $30\,000\,Ft$ – ról $36\,500\,Ft$ – ra emelkedett.**

   a) **Mennyi százalék volt az éves kamat az adott bankban?**

   b) **Mennyi év múlva duplázódik meg a pénzünk, feltéve, hogy nem veszünk ki belőle és a kamatláb sem változik?**

8. (K) Egy szakszervezet azt követeli, hogy a bérek évi $6\ \%$ - kal növekedjenek.

a) **Mennyire nő meg 5 év alatt a mai $96\ 000\ Ft$ – os bruttó fizetés, ha ezt elérik?**

b) **Mikorra lenne a dolgozók fizetése legalább 2 - szerese a mainak?**

9. (K) Évi $6\ \%$ - os bérfejlesztés mellett mennyi lesz annak a dolgozónak a havi bére 5 év múlva, aki most $150\ 000\ Ft$ munkabért kap havonta? (Kerekíts százasokra!) Mennyi év múlva lesz 4 - szerese a bére ilyen bérfejlesztés mellett a dolgozónak?

10. (K) Egy közgazdász - kutató egy tanulmányában hosszú távra évi $5\ \%$ - os GDP növekedést prognosztizált országának. Jelenleg évi $10\ 000$ USD az egy főre jutó GDP az országban. Mekkora lenne 4 év múlva az egy főre jutó GDP változatlan növekedési ütem és népességszám esetén?

11. (K) Egy sejttenyészet 2 naponta meg 2 - szereződik és az első nap kezdetén 5000 sejtünk van. Mennyi lesz 16 nap múlva?

12. (K) Egy fénymásológép $220\ 000\ Ft$ – ba kerül. A használat során a gép mindenkori ára 1 év alatt $20\ \%$ - kal csökken. Amikor a gép értéke $50\ 000\ Ft$ – nál kevesebb lesz, egy nagyobb hiba esetén már gazdaságtalan azt megjavítani. Mennyi év múlva mondhatjuk el, hogy ha a fénymásoló elromlik, akkor célszerű kicserélni?

13. (K) Egy gondoskodó házaspár gyermekük megszületésekor $500\ 000\ Ft$ – ot helyez el egy bankszámlán.

a) **Az elhelyezett összeget 3 évre, évi $8\ \%$ - os kamatra lekötik. Mennyi pénzük lesz közvetlenül a lekötés lejárta után?**

b) **Mekkora az éves kamatláb, ha 10 év múlva $1\ 000\ 000\ Ft$ van a számlán? (Feltételezzük, hogy a kamat nem változott.)**

c) **Mennyi év alatt triplázódik meg az elhelyezett összeg $6\ \%$ - os kamatláb mellett?**

14. (K) Ha egy országban adott időszak (pl. egy év) alatt a születések száma mindig kisebb az elhalálozások számánál, akkor egyéb intézkedések hiányában a népesség fogyásnak indul. Mennyi év alatt csökkenne Magyarország jelenleg 10 millió fős lakossága 8 millióra, ha a népesség fogyása hosszú időn keresztül átlagosan évi 4 ezrelék lenne?

15. (K) Egy biológiai kísérlet során baktériumokat szaporítanak. Azt tapasztalják, hogy megfelelő körülmények között a baktériumállomány 6 óra alatt megduplázódik. A kísérlet kezdetén 1000 baktérium volt.

a) **Mennyi baktérium volt a kísérlet kezdete után 2 nappal?**

b) **A kísérlet addig tart, amíg a baktériumok száma el nem éri a 10^9 darabot. Mennyi ideig folyik a kísérlet?**

16. (K) Egy szigeten egy rágcsáló - populáció $6\,561$ egyedből áll. Tudjuk, hogy ez a rágcsáló fajta évente 2 alkalommal szaporodik. Minden egyes szaporodási időszak végén az állomány létszáma $1,5$ – szersére nő. Mennyi évvel ezelőtt telepedett meg a szigeten ez a kis rágcsáló, ha kezdeteben a populáció 256 egyedből állt?

17. (K) Egy szigeten élő rágcsálópopuláció 3 havonként az aktuális létszám 20 % - ával növekszik. Mennyi évvel ezelőtt voltak 10 – en, ha jelenleg a számítások és csapdázások alapján $5\,024\,000$ egyed él a szigeten?

18. (K) A papucsállatkák átlagban 27 óra alatt osztódnak ketté. Mennyi időre lenne szükség ahhoz, hogy egyetlen papucsállatka utódainak térfogata egyenlő legyen a Föld térfogatával, ha az osztódást követően valamennyi papucsállatka életben maradna? Tudjuk, hogy egy papucsállatka egy kb. $0,1$ milliméter élhosszúságú kockában fér el, s hogy a Föld sugara $6378\ km$.

19. (K) Egy cég forintban kifejezett bevétele 6 egymást követő év végén a következő függvénnyel írható le: $t \mapsto 1,8 \cdot 10^8 \cdot 1,06^t$, ahol $t \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

a) **Mekkora volt a bevétel a kezdő évben?**

b) **Mennyi százalékkal nőtt a bevétel évente?**

c) **Melyik évben érték el a $200\,000\,000\ Ft$ - os bevételt?**

20. (K) Egy cég forintban kifejezett éves önköltsége 6 egymást követő év végén a következő függvénnyel írható le: $t \mapsto 8,3 \cdot 10^7 \cdot 0,97^t$, ahol $t \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

a) **Mekkora volt az önköltség a kezdő évben?**

b) **Mennyi százalékkal csökkent az önköltség évente?**

c) **Melyik évben csökkent $75\,000\,000\ Ft$ alá az önköltség?**

21. (K) Egy reklámcélra használt léghajóba $3000\ m^3$ gázt töltenek. A gázveszteség 10 nap alatt csak (körülbelül) $2\ \%$, s ez állandónak vehető, tehát nem függ a pillanatnyi gázmennyiségtől.

a) **Mennyi százalék a gázveszteség 1 hónap (30 nap) alatt?**

b) **Mikorra fogy el a gáz fele?**

c) **Mennyi ideig tud a levegőben tartózkodni a léghajó, ha $80\ \%$ alatti gázmennyiség esetén már süllyedni kezd?**

22. (K) Egy coli escherichia baktérium 20 perc alatt kettőződik meg. Kezdetben egyetlen baktérium van a tenyészetben.

a) **Mennyi baktérium lesz a tenyészetben 2 óra múlva?**

b) **Mennyi perc múlva lesz a tenyészetben $1\ 000\ 000$ a baktériumok száma?**

c) **Egy coli baktérium tömege a Cornell University tudósainak mérése alapján, 665 femtogramm $\left(1\ fg = 10^{-15}\ g\right)$. Mennyi baktérium van egy $5,32\ g$ – os tenyészetben? (Az eredményt normálalakban add meg!)**

23. (K) Egy kerti tavon békalencse szaporodik úgy, hogy a megfigyelés kezdetekor $0,25\ m^2$ az általa befedett vízfelület nagysága, majd ez naponta megduplázódik.

a) **Ábrázold, hogy hogyan függ a befedett terület nagysága a napokban mért időtől!**

b) **Mekkora a befedett terület nagysága a megfigyelés kezdetéhez képest 2, majd 5 nap elteltével?**

c) **Mennyi nap alatt fedi be a békalencse egészen a tó felszínét, ha a vízfelület nagysága $128\ m^2$?**

24. (K) Egy baktériumtenyészetben N_0 baktérium van. 2 óra múlva 800, újabb 2 óra múlva 2500 lesz a baktériumok száma. Exponenciális növekedést tételezünk fel: egyenlő időközönként ugyanannyiszorosára nő a baktériumok száma.

a) **Hányszor annyi baktérium volt a 4. óra végén, mint a 2. óra végén?**

b) **Mennyi baktérium volt a megfigyelés kezdetén?**

c) **Mennyi baktérium volt a megfigyelés kezdete után 9 órával?**

25. (K) Két növény friss hajtásának hossza a $h\,(t) = 0,8 \cdot 10^{0,02t}\;(mm)$, illetve a $d\,(t) = 0,9 \cdot 10^{0,015t}\;(mm)$ képlet szerint változik, ha a t értékét órában adjuk meg.

a) **Milyen hosszúak voltak a hajtások a mérés kezdetekor?**

b) **Mennyit nőnek a hajtások a mérés első napja alatt?**

c) **Melyik hajtás éri el hamarabb az 1 cm hosszúságot?**

26. (K) A világméretű szociológiai kutatások eredményeként a fejlett ipari országok egy főre jutó nemzeti összterméke (GDP) és a lakosság várható élettartama között hozzávetőleg az alábbi tapasztalati összefüggés állítható fel: $É = 75,5 - 5 \cdot 1,081^{\frac{6000-G}{206}}$, ahol É az átlagos várható élettartam években, G pedig a GDP, reálértékben átszámítva 1980 – as dollárra.

a) **Mennyi várható élettartam – növekedést okoz kétszeres GDP – növekedés, ha ez a növekedés 1500 dollárról 3000 dollárra történik?**

b) **Mennyi GDP – növekedés szükséges a várható élettartam 10 évvel való meghosszabbodásához, ha ez 50 évről 60 évre történik?**

c) **Legfeljebb mekkora a várható élettartam abban az országban, ahol a GDP nem éri el az 5000 (1980 – as) dollárt?**

d) **Legalább mekkora a GDP abban az országban, ahol a várható élettartam meghaladja a 70 évet?**

27. (K) Az alábbi táblázat a Föld népességének alakulását mutatja. Az adatok a népesség gyorsuló ütemű növekedését mutatják. Ha exponenciális növekedést feltételezünk, akkor az adatsorra illeszkedő trendet az $n = 897,9 \cdot 1,011^x$ képlettel írhatjuk le. (n a Föld előjelzett népessége millió főben számolva, $1837 + x$ – ben)

év	1837	1927	1960	1987	1999
milliárd fő	1	2	3	5	6

a) **Mennyi lakosa lenne a Földnek 2020 – ban a megadott képlet szerint?**

b) **Melyik évben kellett volna a Föld össznépességének elérnie a 6 milliárdot a megadott képlet szerint?**

28. (K) A globális felmelegedés hatására az Arktisz jégpáncéljának területe folyamatosan csökken, várhatóan a következő összefüggés szerint alakul (millió négyzetkilométerben): $T(x) = 21 \cdot 0,989^x$, ahol x a 2015 óta eltelt évek számát jelenti.

a) **Mekkora volt a jégpáncél 2015 – ben**

b) **Mekkora lesz várhatóan a jégpáncél területe 2030 – ban?**

c) **Melyik évben lesz a jégpáncél területe 7 millió négyzetkilométer?**

29. (K) A földrengések erőségét a Richter – skálán mérjük. A földrengés középpontjában felszabaduló energia nagyságát a következő képlettel számoljuk: $\lg E = 4,8 + 1,5M$. A képletben E a felszabaduló energia, mértékegysége joule, M pedig a földrengés erőssége a Richter – skálán.

a) **Az 1763 – ban Komárom környékén észlelt földrengés erősségét a Richter – skála szerint $6,3$ – esre becsülik. Mekkora energia szabadult fel a rengés középpontjában?**

b) **A 2011 – ben Oroszlány környékén történt földrengésben $7,08 \cdot 10^{11}$ joule energia szabadult fel. Mekkora volt a rengés erőssége egy tizedesre kerekítve?**

c) **A 2017 – ben Bábolnán bekövetkezett rengés erőssége $0,8$ – del kisebb volt, mint a 2015 – ös miskolci rezgés erőssége. Hányad része volt a rengések következtében a Bábolnán felszabaduló energia a Miskolcon felszabaduló energiának?**

30. (K) Egy tóba honosítás céljából 500 darab csíkos sügért telepítettek 2005 márciusában. A halbiológusok figyelemmel kísérték az állomány gyarapodását és azt találták, hogy a halak száma a $h(t) = 500 \cdot \log_3(2t + 3)$ függvénnyel írható le, ahol t a telepítéstől eltelt évek számát jelenti.

a) **Mennyi csíkossügér élt a tóban 2006 márciusában?**

b) **Mennyi százalékkal nőtt a halak száma 2007 és 2009 márciusa között?**

c) **Várhatóan mikor éri el a hal populáció az 1500 darabot?**

31. (K) Egy informatikai eszközöket gyártó cég olcsó laptopok forgalomba hozását tervezi. A cég marketing osztályának szakemberei szerint az eladott termékek száma – 1000 darabban számolva – várhatóan az $s\,(t) = 100 + 30 \cdot \lg(7t + 1)$ függvény szerint alakul, ahol t a forgalomba kerüléstől eltelt idő években számolva.

a) **Mennyi darab laptopot adnak el várhatóan a piacon való megjelenéskor és mennyit 1 év múlva?**

b) **Mennyi év múlva érné el az eladás a megjelenéskor eladott mennyiség 2 - szeresét?**

32. (K) Az autóverseny pályákon óránként mérik az aszfalt hőmérsékletét. Egy nyári napon azt tapasztalták, hogy 0 órától délután 3 óráig az aszfalt hőmérséklete jó közelítéssel megadható a $t\,(x) = 22 \cdot 10^{\frac{x}{34}}$ függvénnyel, ahol x a 0 órától eltelt időt jelenti órában mérve, a hőmérsékletet pedig ℃ - ban kapjuk.

a) **Mennyi volt az aszfalt hőmérséklete 0 órakor, illetve reggel 6 órakor?**

b) **Elérte – e az aszfalt hőmérséklete a kritikus 60 ℃ - ot délután 3 - kor?**

c) **Mennyi százalékkal nőt az aszfalt hőmérséklete reggel 8 és déli 12 óra között?**

33. (K) A Föld különböző növényzetű övezeteit vizsgálva a kutatók arra a megállapításra jutottak, hogy az éves csapadékmennyiség és a termelődött új hajtások mennyisége között a $\lg T = 0,8 \cdot \lg C + 1,2$ tapasztalati összefüggés állítható fel, ahol T a termékenység (szárazanyag – tartalomra számítva $\frac{g}{m^2}/év$ egységben), C pedig az éves csapadékmennyiség cm – ben.

a) **Fejezd ki a megadott képletből a T változót!**

b) **Fejezd ki a megadott képletből a C változót!**

c) **Kb. mekkora termékenységűek az évi $1\ m$ – es csapadékú övezetek (pl. a mérsékelt égövi füves területek)?**

34. (K) Egylépcsős rakéta elméletileg elérhető legnagyobb sebessége: $v = 2,303u \cdot \lg \frac{m_0}{m_v}$, ahol m_0 a rakéta kilövés előtti tömege, m_v a rakéta végső tömege az összes hajtóanyag elégetése után, u pedig a rakéta hajtóművéből kiáramló gáz sebessége a rakétatesthez viszonyítva.

a) **A II. világháborús $V2$ rakéták esetén $m_0 = 13\,000\ kg, m_v = 4000\ kg$, $u = 2000\ \frac{m}{s}$ volt. Legfeljebb mekkora sebességet érhettek volna el?**

b) **Technikai okok miatt m_0 nem haladhatja meg az m_v 5 - szörösét, és u sem lehet nagyobb $2,5\ \frac{km}{s}$ – nál. Legfeljebb mekkora sebességet lehet egylépcsős rakétákkal elérni?**

35. (K) A 0 ℃ - os környezetben kihűlő folyadék (℃ - ban mért) hőmérsékletét a $T\ (t) = a \cdot 10^{-bt}$ összefüggés írja le, ahol a és b adott állandók, t az eltelt idő percben. Határozd meg az a és a b értékét, ha tudjuk, hogy $T\ (0) = 100$ ℃ és $T\ (10) = 79$ ℃. Az adatok alapján 20 perc elteltével mekkora lesz a folyadék hőmérséklete?

36. (K) A lézersugarak nagyon intenzív fény - és hősugarak, melyeket egy pontra összegyűjtenek. Egyre gyakrabban használják a gyógyászatban is. A sugarak intenzitása exponenciálisan csökken anyagokba való behatoláskor. $6\ mm$ mélységben az intenzitás az eredeti érték 10 % - ára csökken.

a) **Írj fel formulát az intenzitás csökkenésére!**

b) **Mekkora az intenzitás $2\ mm$ mélységben?**

c) **Milyen mélységben lesz az intenzitás 200 és 500 $\frac{W}{m^2}$ között, ha a kibocsátáskor – a forrás elhagyásakor – az intenzitás 800 $\frac{W}{m^2}$?**

d) **Mekkora legyen az eredeti intenzitás, hogy $7\ mm$ mélységben 150 $\frac{W}{m^2}$ legyen a lecsökkent intenzitás?**

37. (K) A fényerőt (I) a fényforrástól $d\ (m)$ távolságban $I\ (d) = I_0 \cdot a^d$ függvény adja meg, ahol I_0 a kezdeti fényerő, "a" a közegtől függő állandó $(0 < a < 1)$. Tudjuk, hogy egy helyen egy motorkerékpáros lámpája még a ködben is észrevehető, ha ott a fényerő az eredeti fényerejének legalább a 60 % - a meg van. Legfeljebb milyen távolságból lehet látni a motorkerékpárost, ha $a = 0,94$?

38. (E) A fényerőt a fényforrástól $d\ (m)$ távolságban $I\ (d) = I_0 \ \cdot a^d$ függvény adja meg, ahol I_0 a kezdeti fényerő, "a" a közegtől függő állandó $(0 < a < 1)$. Tudjuk, hogy egy kerékpáros lámpája még a ködben is észrevehető egy téli napon, ha eredeti fényerejének legalább 60 % - a meg van.

a) **Milyen távolságból lehet látni a kerékpárost, ha $a = 0,96$?**

b) **Két szembejövő kerékpáros sebessége $12\ \frac{km}{h}$, illetve $18\ \frac{km}{h}$. Attól kezdve, hogy észreveszik egymást mennyi idő múlva találkoznak?**

c) **A $12\ \frac{km}{h}$ sebességgel haladó kerékpáros mögött $54\ \frac{km}{h}$ sebességgel haladó gépjármű vezetője el tudja – e kerülni az ütközést, ha reakcióideje $0,5\ s$, az autó $2\ s$ alatt fékeződik le?**

39. (E) A fény a ködben elég rövid távon elveszti a fényerejét. A fényerőt a fényforrástól d távolságban az $I\ (d) = I_0 \ \cdot a^d$ függvény adja meg, ahol I_0 a kezdeti fényerő; d a lámpától való távolság; "a" egy a köd sűrűségétől függő állandó érték $(0 < a < 1)$. Tudjuk, hogy egy autó lámpája még a ködben is észrevehető, ha az eredeti fényerejének legalább az 5 % - a megvan. Tudjuk továbbá, hogy egy novemberi napon $a = 0,95$.

a) **Milyen messziről lehet látni a szembejövő autó lámpáját?**

b) **Attól kezdve, hogy észreveszik egymást, mennyi idő múlva találkoznak, ha mindkét autó sebessége $90\ \frac{km}{h}$?**

c) **Az egyik, még éppen nem látva a szembe jövőt, egy előtte csak $45\ \frac{km}{h}$ sebességgel haladó teherszállító járművet kezd előzni, amelynek hossza $8\ m$ (az előzést végrehajtó autóé $4\ m$). A teherjármű éppen $2\ m$ - rel van előtte, és az előzőnek legalább $1\ m$ - rel kell a teherautó elé kerülnie, a teljesen egyenes útszakaszon. Vajon sikerülhet – e még az előzés ütközés nélkül, ha a teherautó nem fékez és az előző sem akarja túllépni a megengedett sebességhatárt $\left(90\ \frac{km}{h}\right)$?**

40. (K) Az egyén által érzékelt (szubjektív) hangerősség és a hangforrás valódi (objektív) hangerőssége közötti összefüggés: $E = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, ahol I a $\frac{watt}{m^2}$ – ben mért objektív hangerősség, E pedig a decibelben mért szubjektív hangerősség.

a) **Az alig hallható suttogás objektív hangerőssége $I_0 = 10^{-12}\ \frac{watt}{m^2}$, a hangszóróból áradó hangos zenéé pedig ennek $1\,000\,000$ - szorosa. Szubjektíve milyen erősségűnek érzik az emberek ezeknek a hangforrásoknak a hangját?**

b) **Az $1000\ Hz$ –es hangmagasságon süvítő repülőgép – motor hangosságát 130 decibelnek érzékeljük (3 méterről). Hányszorosa a motorzaj objektív hangerőssége a halk suttogásénak?**

41. (K) Egy új kórokozó által okozott első elhalálozást 1981 – ben regisztrálták, 1982 – ben 2, 1983 – ban 3 haláleset következett be. Az új betegség miatti évenkénti elhalálozásokat 10 éven keresztül figyelve, az adatok gyorsuló ütemű növekedést mutatnak. Ha a folyamatot exponenciálisnak tételezték fel, akkor a trend egyenlete $h = 1,27 \cdot 1,569^x$, ahol x az 1981 óta eltelt évek számát, h pedig az $(1981 + x)$ – ben bekövetkezett halálesetek számát jelenti.

a) **A megadott összefüggéssegítségével becsüld meg, mennyi az adott betegség miatt 2005 – ben várható elhalálozások száma!**

b) **Melyik évben érné el az $1\,000\,000$ – t az elhalálozások száma, ha a trend változatlan maradna?**

42. (K) Számítógépünk az internetről jó kapcsolat esetén 128 megabájt adatot tölt le másodpercenként. Egyik este sajnos a hálózat túlterheltsége miatt a letöltés sebessége másodpercről másodpercre csökkent. Elkezdtünk letölteni egy programot, melynek mérete 254 megabájt. A letöltés első másodpercében maximális sebességgel érkeztek az adatok, a második másodpercben felére csökkent a letöltött adat mennyisége, majd minden egyes másodpercben megfeleződött (a megelőző másodperchez képest) ez az érték.

a) **Mennyi idő alatt töltődik le a program?**

b) **Hány másodperc múlva megy a letöltési sebesség a kritikus másodpercenkénti 100 kilobájt alá? (1 megabájt $= 1024$ kilobájt)**

43. (K) Kisebb mennyiségű cukor oldódása nagy mennyiségű vízben közelítőleg az $M\ (t) = M_0 \cdot a^t$ formula szerint, tehát időben exponenciálisan zajlik ($0 < a < 1$; a cukor vízbe kerülésétől percben mért időt jelöli a t; $M\ (t)$ a t időpontig még fel nem oldódott cukor mennyisége; M_0 pedig a teljes cukor mennyisége, amit a vízbe tettünk). Legyen $a = 0,95$.

a) **Mennyi idő múlva oldódik fel a cukormennyiség fele?**

b) **Ha a $99,9$ % - os oldódást már „lényegében teljesnek” nevezzük, akkor mikorra oldódik fel lényegében teljesen a cukor?**

44. (K) Zoli egy 60 méteres toronyban kipróbálta a bungee jumpingot. Mennyi másodperc alatt érte volna el a víz felszínét, ha az ugrókötél nem lassítja? A megtett utat az $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ összefüggéssel számolhatjuk ki, a kezdősebességet tekintsük 0 – nak, $g = 9,8\ \frac{m}{s^2}$ a nehézségi gyorsulás, s az út, t az út megtételéhez szükséges időtartam.

45. (K) Ismerjük a fizikából, hogy a légnyomás felfelé haladva exponenciálisan csökken, azaz h (méter) magasságban: $p\ (h) = p_0 \cdot 2^{-c \cdot h}$, ahol $p_0 \approx 100\ 000\ Pa$ (a légnyomás a Föld felszínén). Tudjuk, hogy kb. $5\ 500\ m$ magasan feleennyi a légnyomás.

a) **Mennyi a c állandó értéke?**

b) **Mennyi a légnyomás a Himalája tetején (kb. $8\ 800\ m$ magasan)?**

46. (K) A csillagászok az égitestek fényességét ún. magnitúdóban mérik. A régi görögök a legfényesebb csillagokat nevezték elsőrendűeknek, a szabad szemmel még éppen láthatókat hatodrendűeknek, vagyis a nagyobb szám jelzi a halványabb csillagot. A skála logaritmikus, vagyis minden egész magnitúdó-változás (különbség) ugyanannyiszoros eltérést (hányadost) jelent. 5 magnitúdó-változás 100 – szoros fényerősség változást jelent.

a) **Hányszoros fényerőváltozást jelent 1 magnitúdó-változás?**

b) **A Nap $-26,8$ magnitúdós, a Hold $-12,2$. Hányszor olyan fényes a Nap, mint a Hold?**

47. (K) A pH egy dimenzió nélküli kémiai mennyiség, mely egy adott oldat kémhatását (savasságát vagy lúgosságát) jellemzi. Híg vizes oldatok esetén a pH egyenlő az oxóniumion – koncentráció $\left(\frac{mol}{dm^3}\right)$ tízes alapú logaritmusának ellentettjével: $pH = -\lg(H_3O^+)$.

a) **Szobahőmérsékleten $1\ dm^3$ tiszta víz $10^{-7}\ mol$ oxóniumiont tartalmaz. Mennyi a tiszta víz pH értéke?**

b) **Egy testápolót úgy reklámoznak, hogy a pH – értéke $5,5$. Mennyi az oxóniumion – koncentráció ebben az oldatban?**

c) **Egy oldatban az oxóniumion – koncentrációt a 100 – szorosára növeljük. Hogyan változik az oldat pH – értéke?**

48. (K) Ha a levegő tengerszinten pascalban mért nyomását p_0 jelöli, és h méter magasságban a nyomás pascalban mérve p, akkkor ezen mennyiségek között az alábbi összefüggést írhatjuk fel: $\lg p = \lg p_0 - 5,203 \cdot 10^{-5} \cdot h$.

a) **Ha tengerszinten a nyomás $10^5\ Pa$, akkor mekkora a nyomás a Mount Everest csúcsán, azaz $8848\ m$ magasan? (Az eredményt 2 tiezedesjegyre kerekítve add meg!)**

b) **Milyen magasságban lesz a nyomás $50\ \%$ - a a tengerszinten mért nyomásnak? (A megoldást egész értékre kerekítve add meg!)**

49. (K) A régészeti leletek radiokarbon kormeghatározásához használt egyik összefüggés: $A_t = A_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, ahol A_t és A_0 méréssel meghatározható értékek, T a C^{14} szénizotóp felezési ideje $(5570\ év)$, t pedig a vizsgált anyag meghatározandó életkora. Ha – egy leleten elvégzett mérések alapján - A_t 3 - szorosa az A_0 – nak, akkor milyen idősnek mondható a régészeti lelet a radiokarbon – módszer szerint?

50. (K) A radioaktív anyagok bomlását az $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje. A bizmut-214 radioaktív izotóp 10% - a 3 perc alatt elbomlik.

a) **Mekkora a Bi^{214} felezési ideje?**

b) **Egy óra alatt hányadrészére csökken a radioaktív bizmutizotóp tömege?**

c) **Mennyi idő múlva marad meg az eredeti mennyiség $0,01\ \%$ - a?**

51. (K) A radioaktív anyagok bomlását az $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje.

a) **Hányadrésze van meg egy kőzetben (2018 – ban) az időszámításunk kezdetén még meglevő radioaktív tóriumizotópoknak (a tóriumizotóp felezési ideje 80 ezer év)?**

b) **Egy óra alatt hányadrészére csökken a $19,7$ perc felezési idejű radioaktív bizmutizotóp tömege?**

52. (K) Ismert, hogy a radioaktív bomlás során az m_0 kezdeti tömegű, T felezési idejű (a felezési idő az az időtartam, amely alatt a kezdeti tömeg a felére csökken) radioaktív anyagból t idő múlva megmaradó tömeg: $m\,(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

a) **Egy bizonyos radioaktív anyagról tudjuk, hogy a kezdeti $8\ mg$ tömeg 6 perc alatt $2\ mg$ – ra csökken. Mennyi az anyag felezési ideje?**

b) **Egy másik radioaktív anyagról tudjuk, hogy a felezési ideje 15 év. Ismert, hogy a kezdeti tömeg 30 év alatt $3\ g$ – ra csökken. Mennyi volt a kezdeti tömeg?**

c) **Kétféle radioaktív anyagról a következőket tudjuk. Az első felezési ideje T_1, kezdeti tömege M_1. A második anyag tömege a megfigyelés kezdetén M_2, de nem ismerjük a T_2 felezési időt. Azt tudjuk még, hogy t idő alatt a két anyag úgy bomlik el, hogy a megmaradó tömegük egyenlő lesz. Fejezd ki a T_2 – t, M_1, M_2 és T_1 segítségével!**

53. (K) A $^{226}_{88}Ra$ izotóp felezési ideje 1614 év, ami azt jelenti, hogy az anyag mennyiségének fele ennyi idő alatt bomlik el. A bomlási folyamat során t év múltán meglévő bomlatlan anyag mennyisége: $m\,(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1614}}$, ahol m_0 a kiindulási, még teljes egészében bomlatlan anyag tömege. Egy fából készült régészeti leletben 7600 $^{226}_{88}Ra$ izotóp van cm^3 – enként. Mennyi idős a lelet, ha egy ugyanolyan fából készült mai tárgyban $11\,000$ $^{226}_{88}Ra$ izotóp van cm^3 – enként?

54. (K) A radioaktív bomlást az $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi bomlatlan tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, és T a felezési idő. A $^{226}_{88}Ra$ izotóp mennyiségének fele 1614 év alatt bomlik el, azaz a felezési ideje 1614 év.

a) **Egy régi fa lelet cm^3 – enként 9375 $^{226}_{88}Ra$ – izotópot tartalmaz. Milyen öreg leleht ez a lelet, ha ugyanilyen élő fa $10\,000$ $^{226}_{88}Ra$ – izotópot tartalmaz cm^3 – enként?**

b) **Legalább mennyi idő szükséges ahhoz, hogy egy adott mennyiségnek több, mint a $\frac{3}{5}$ – öd része elbomoljon?**

55. (K) A radioaktív anyagok bomlását a $C = C_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol C a pillanatnyi aktivitás, C_0 a kezdeti aktivitás, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje.

a) **Mennyi a felezési ideje annak a radioaktív izotópnak, amelynek kezdetben $4 \cdot 10^{-15}$ Bq aktivitású darabja 2 hét múlva már csak $2,97 \cdot 10^{-15}$ Bq aktivitású? (Bq: becquerel az aktivitás mértékegysége)**

b) **Mennyi idő múlva lesz a kezdetben $2 \cdot 10^{-14}$ Bq aktivitású, 5 napos felezési idejű radioaktív anyagdarab aktivitása $7,58 \cdot 10^{-15}$ Bq aktivitású?**

56. (K) 1614 év alatt bomlik el a $^{226}_{88}Ra$ izotóp mennyiségének fele $\left(^{226}_{88}Ra \text{ felezési ideje } 1614 \text{ év}\right)$.

a) **Mennyi idő alatt bomlik el egy adott mennyiség $\frac{2}{5}$ – része, ha a bomlási folyamatot az $N_t = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ formula írja le (N_0 az izotóp kezdeti mennyisége; N_t a bomlatlan izotópok száma t idő múlva; T az izotóp felezési ideje)?**

b) **Mennyi idő alatt bomlik el egy adott mennyiség 75 % - a?**

c) **Találtak egy régi fa leletet, amely cm^3 – enként 8975 $^{226}_{88}Ra$ izotópot tartalmaz. Milyen régi lehet ez a lelet, ha ugyanilyen élő fa $10\,000$ $^{226}_{88}Ra$ izotópot tartalmaz cm^3 – enként?**

57. (K) A régészeti leletek kormeghatározásának egyik lehetséges módszere az úgynevezett radiokarbon módszer. Ennek lényege, hogy a radioaktív ^{14}C szénizotóp bomlásánál az izotópok számának időfüggését az $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ összefüggés adja meg, ahol N_0 az izotópok száma kezdetben; T pedig a felezési idő: ennyi idő alatt csökken az adott mintában a ^{14}C szénizotópok száma a felére. Tudjuk, hogy a ^{14}C szénizotóp esetén $T = 5570$ év, így a képlet segítségével t meghatározható, ha ismert $\frac{N(t)}{N_0}$ értéke.

a) **Mennyi éves lehet az a lelet, amelyben a mérések szerint a radioaktív ^{14}C mennyisége a 25 % - ára csökkent? (Évszázados pontossággal add meg!)**

b) **Mennyi éves lehet az a lelet, amelyben a mérések szerint a radioaktív ^{14}C mennyiségének $\frac{2}{3}$ – a elbomlott? (Évszázados pontossággal add meg!)**

58. (K) Egy radioaktív anyag kis mennyisége 10^{23} darab radioaktív atomot tartalmaz. A felezési idő 1 óra. Ha egy radioaktív anyag eredetileg N_0 darab bomlatlan atomot tartalmaz, akkor t idő múlva $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ darab bomlatlan atomot fog tartalmazni, ahol T a felezési idő.

a) **Mennyi bomlatlan atomot fog tartalmazni a feladatban megadott anyagminta 15 perc múlva?**

b) **Mennyi idő alatt bomlik el az anyagminta 40 % - a?**

59. (K) A 226 – os tömegszámú rádium (Ra) radioaktív, felezési ideje 1600 év. Az eredetileg N_0 számú atomot tartalmazó rádium t év elteltével N számú bomlatlan rádiumatomot tartalmaz, ahol N kiszámítható az $N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$ összefüggés segítségével is. Mennyi idő alatt bomlik el a rádiumatomok 1 % - a az eredetileg $2,6 \cdot 10^{21}$ atomot tartalmazó (kb. 1 gramm) rádiumban?

60. (E) A radioaktív izotópok bomlásának időfüggését az $N\,(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ összefüggés adja meg, ahol N_0 az izotópok száma kezdetben; $N\,(t)$ az izotópok száma t idő múlva; T pedig a felezési idő: ennyi idő alatt csökken az adott mintában az izotópok száma a felére. Adott egy urántömb, amely 30 % ^{235}U izotópot és 70 % ^{238}U izotópot tartalmaz. Tudjuk, hogy az ^{235}U izotóp felezési ideje $7,1 \cdot 10^8$ év, az ^{238}U izotóp felezési ideje $4,51 \cdot 10^9$ év. Hány év múlva lesz az ^{235}U mennyisége 1 % -a az ^{238}U mennyiségének?

61. (E) Ha a 0 időpontban N_0 számú bontatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma $N\,(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ lesz ($e \approx 2,718$). A λ neve bomlási állandó (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban). A rádium bomlási állandója: $\lambda = 4,279 \cdot 10^{-4} \, \frac{1}{\text{év}}$.

a) **100 év alatt hányadrésze bomlik el a rádiumatomoknak?**

b) **Mennyi idő múlva bomlik el a rádiumatomok fele? (Ezt az időt a radioaktív anyagok felezési idejének nevezik.)**

62. (E) Ha a 0 időpontban N_0 számú bontatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ lesz ($e \approx 2,718$). A λ neve bomlási állandó (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban). A C^{14} szénizotóp radioaktív (az atommagból elektron lép ki és így 7 – es rendszámú nitorgénné alakul át). Tudjuk, hogy radioaktív C^{14} – et tartalmazó anyagban 5570 év alatt csökken felére a C^{14} atomok száma (5570 év a felezési ideje).

a) **Mekkora a bomlási állandó értéke ebben az esetben?**

b) **Mennyi százaléka bomlik el évente a C^{14} atomoknak?**

c) **Mennyi év alatt bomlik el a radioaktív szenet tartalmazó anyagban a C^{14} atomok 80 % - a?**

63. (E) A nagyon magas légrétegekben a világűrből behatoló kozmikus sugárzás hatására a ${}^{14}_{7}N$ nitrogénizotópból radioaktív ${}^{14}_{6}C$ szénizotóp keletkezik. Ez az idők folyamán visszaalakul nitrogénné. 5730 év (felezési idő) alatt a ${}^{14}_{6}C$ izotóp mennyiségének a fele bomlik el.

a) **Mennyi idő alatt bomlik el egy adott ${}^{14}_{6}C$ mennyiség $\frac{3}{4}$ – része?**

b) **Találtak egy régi fa leletet, amely a vizsgálatok szerint $33\,000$ ${}^{14}_{6}C$ atomot tartalmaz cm^3 – enként. Milyen öreg lehet ez a lelet, ha az ugyanilyen élő fa $100\,000$ ${}^{14}_{6}C$ izotóp atomot tartalmaz cm^3 – enként?**

64. (E) A kísérletekkel is alátámasztott lehűlési törvény szerint az ahhoz szükséges idő, hogy egy T_0 hőmérsékletű tárgy, K hőmérsékletű környezetben, T hőmérsékletre lehűljön, $t = k \cdot \ln\left(\frac{T_0 - K}{T - K}\right)$, ahol k a lehűlő anyagra jellemző állandó, az időt pedig percben kapjuk. Mennyi idő alatt hűl le a 85 ℃ hőmérsékletű sült malac 38 ℃ hőmérsékletre, ha a lakás hőmérséklete 21 ℃ és $k = 12,5$?

65. (E) A T_1 állandó hőmérsékletű környezetben, kezdetben T_0 hőmérsékletű anyag t (óra) idő múlva T hőmérsékletre hűl, ezt a folyamatot az ún. Newton – féle lehűlési törvény $T = T_1 + (T_0 - T_1) \cdot e^{-Kt}$ írja le, ahol $K\left(\frac{1}{óra}\right)$ hőátbocsátási tényező. Állandó, 22 ℃ - os hőmérsékletű lakásban mennyi idő alatt „hűl le” a 85 ℃ - os kávé 28 ℃ - ra? $\left(K = 13\ \frac{1}{óra} óra; e \approx 2,718\right)$

66. (E) T_1 állandó hőmérsékletű környezetben, kezdetben T_0 hőmérsékletű anyag t (óra) idő múlva T hőmérsékletre hűl, ezt a folyamatot az ún. Newton – féle lehűlési törvény $T = T_1 + (T_0 - T_1) \cdot e^{-Kt}$ írja le, ahol K $(1 \,/\, óra)$ hőátbocsátási tényező. Állandó, 21 ℃ - os hőmérsékletű lakásban mennyi idő alatt „hűl le” a 100 ℃ - os kávé 40 ℃ - ra? $(K = 13,5 \; 1 \,/\, óra)$

67. (E) Mekkora magasságba kell emelkedni a Földtől, hogy a légnyomás a tengerszinten mért légnyomás kétharmadára csökkenjen? A kilométerben megadott h magasságban uralkodó p nyomást a $p = p_0 \cdot e^{-0,1275h}$ formulával kapjuk ($e \approx 2,718$, ez a természetes alapú logaritmus alapszáma).

68. (E) A tengerszint felett h kilométer magasságban a légkör nyomását $\big(p(h)\big)$ a $p(h) = p_0 \cdot e^{-0,1275 \cdot h}$ formulával közelítjük, ahol $p_0 \approx 101\,300\, Pa$ a légkör nyomása a tengerszinten.

a) **„Magyar idő szerint vasárnap 20 óra 7 perckor Felix Baumgartner bázisugró leugrott a sztratoszféra pereméről. Ez a történelem legmagasabbról végrehajtott ugrása, a leggyorsabb szabadesése és a legmagasabbra elérő emberrel megtett ballonos repülés.” (Forrás: www.hvg.hu)**

Baumgartner Felix $36\, km$ magasságból ugrott le. Mekkora volt ebben a magasságban a légkör nyomása? Válaszod százasokra kerekítve add meg Pa – ban!

b) **„Oxigénpalack nélkül hódította meg Klein Dávid a Manaszlut (Nepál), a Föld nyolcadik legmagasabb hegyét.” (Forrás: www.erdekesvilag.hu)**

Mennyi méter magas a Manaszlu hegy, ha a hegycsúcson a nyomás $35\,800\, Pa$? Válaszodat egészre kerekítve add meg!

69. (E) Csaba felnőtt korában híres hegymászó szeretne lenni. Tudja, hogy a légköri nyomás a magassággal csökken. Milyen magas hegyre kell felmennie, hogy a nyomás a tengerszinten mért érték 75 % - ára csökkenjen? A tengerszinten mért nyomás értéke $p_0 = 10^5\, Pa$, a nyomás magasságfüggését a $p = p_0 \cdot e^{-0,1275 \cdot h}$ egyenlet írja le, ahol $e = 2,718$ és h a magasság kilométerben mérve.

70. (E) Az üvegszálas távközlésre gyakorlatban az $1300\, nm$ - es, illetve az $1550\, nm$ – es hullámhosszokat alkalmazzák, az ott található csillapítási minimumok miatt. Miközben a fény az üvegen áthalad, energiája a megtett úttal arányosan csökken. Egy z távolság mgtétele után a fény energiája $P\,(z) = P_0 \cdot e^{-Kz}$, ahol P_0 a kezdeti energia, az $e \approx 2,718$ (Euler – féle szám vagy Napier – állandó), és a K állandó az ún. csillapítási tényező. Mekkora út megtétele után csökken a fény energiája 10 % - kal, ha $K = 0,0027\, \frac{1}{km}$? (Az eredményt egész km – re kerekítve add meg!)

71. (E) A gázok adiabatikus (hőcsere nélküli) állapotváltozását a $\frac{p^{k-1}}{T^k}$ állandó egyenlet írja le, ahol p a gáz nyomása, T a hőmérséklete, k pedig egy, a gázfajtára jellemző arányszám. Mekkora ez az arányszám héliumra, ha annak egy adiabatikus folyamatban 69 % - kal nő a nyomása, miközben 23 % - kal nő a hőmérséklete?

72. (E) Gazdaságkutatók szerint Közép – és Kelet – Európa „átmeneti" országainak átlagos egy főre jutó GDP – je $n = \frac{\lg F - \lg f}{\lg r - \lg R}$ év alatt éri utol a fejlett országokét, ahol F és f a fejlett, illetve átmeneti országok jelenlegi egy főre jutó GDP – jét jelöli. 1992 – ben a fejlett országokban ez a mutató (átlagosan) $17\,444$ dollár, az átmeneti országokban pedig $4\,627$ dollár volt. R és r azt mutatja meg, hányszorosára növekszik egy év alatt a fejlett, illetve fejlődő országok egy főre jutó GDP – je. A fejlett országokban az egy főre jutó GDP éves növekedési üteme 2 % (vagyis $R = 1,02$). Mennyi százalékos éves növekedést kellett volna elérni az átmeneti országokban, hogy az utolérés 20 év alatt bekövetkezzen?

73. (E) Ismert a barometrikus magasságformula: $p_x = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot x}$, ahol x jelöli a tengerszint feletti magasságot, p_x jelöli a légnyomást ebben a magasságban, p_0 jelöli a légnyomást a tengerszinten ($x = 0$ magasságban), ρ_0 a levegő sűrűségét a tengerszinten, g pedig a gravitációs gyorsulás nagyságát.

$$e \approx 2,718; p_0 = 10^5\ \frac{N}{m^2}; \rho_0 = 1,3\ \frac{kg}{m^3}; g = 9,81\ \frac{m}{s^2} \text{ és } N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

a) **Mekkora a légnyomás $10\ km$ magasságban? Ez hány százaléka a normális légnyomásnak?**

b) **Egy léghajóban a barométer a tengerszinten mért érték 90 % - át jelzi. Milyen magasan lebeg?**

74. (E) Az Eiffel – torony biztonsága érdekében a torony profilját a megfelelő intervallumon a következő logaritmusfüggvény írja le: $y = 91 \cdot \left|\ln \frac{|x|}{62,5}\right|$. A torony 1. szintje $57,63\ m$, 2. szintje $115,75\ m$, 3. szintje $276,13\ m$ magasságban van.

a) **Mekkora a torony alapjának szélessége?**

b) **Mekkora a 2. szinten levő terasz szélessége?**

c) **A 3. szinten levő teraszról milyen messzire lehet ellátni? (A horizont távolságát keressük a toronytól légvonalban, ha a Földet $6,37 \cdot 10^6\ m$ sugarú gömbnek tekintjük.)**

75. (E) A matematikai információelméletben az n betűs ábécéből alkotott, m számú karakterből álló hír információmennyiségét a $H \coloneqq m \cdot \log_2 n$ képlettel definiálták (Hartley – képlet). A legegyszerűbb ábécé kétjelű ($n \coloneqq 2$, mert egy jellel nem lehet hírt közölni). Ha ebből egy jelet kiválasztunk ($m \coloneqq 1$), akkor megkapjuk a lehető legkisebb információs értékkel rendelkező hírt. Ez az információs érték: $\log_2 2$, azaz éppen 1 lesz. Ezt az információmennyiséget John W. Tukey nevezte el $1\ bit$ – nek (a „binary digit” rövidítése).

a) **Mekkora a 90 számos lottó első, illetve második kihúzott számának információs értéke?**

b) **Mennyi betűs ábécé esetén lenne egy 5 karakterből álló hír információs értéke $15\ bit$?**

c) **Mekkora egy hétjegyű telefonszám információs értéke?**

76. (E) Alkalmazzuk a fékezett (logisztikus) növekedés modelljét az emberiség létszámának változására az elmúlt évszázad néhány ismert értékének figyelembevételével. A modell szerint a vizsgálat kezdetétől eltelt t idő múlva a lélekszám $N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t}$, ahol N_0 az induló egyedszám, K a körülmények szerint „elviselhető” maximális egyedszám, a pedig a növekedésre jellemző állandó. Tudjuk, hogy 1960 – ban kb. 3 milliárd ember élt a Földön, 1977 – ben pedig $4,1$ milliárd.

a) **Mennyien kellene lennünk most a Földön a képlet szerint, ha feltesszük, hogy legfeljebb 20 milliárd embernek van megfelelő létfeltétel (élelem, hely, stb.)?**

b) **Mennyien fogunk élni a modell szerint 2050 – ben, illetve 2100 – ban?**

77. (E) Egy városban az influenza terjedését próbálják a logisztikus növekedéssel modellezni, ezért a betegek számát az $N\,(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t}$ formulával közelítik, ahol t a járvány kezdetétől eltelt idő napokban, $N\,(t)$ a megbetegedések száma t nap elteltével, N_0 a járvány kezdetekor a betegek száma (ez most 1000 fő volt), K a város teljes lakossága (ez most $1\,500\,000$ fő, ennél több beteg nyilván nem lehet). 5 nappal a járvány kezdete után már 4205 fertőzött volt.

***a)* Mutasd meg, hogy a képletben szereplő a paraméter értéke $0,75$!**

***b)* Mennyi betegre számíthatnak a járvány kezdete után 7, ileltve 13 nap múlva?**

***c)* Mennyi nap elteltével lesz $13\,210$ beteg?**

78. (E) Alkalmazzuk a fékezett (logisztikus) növekedés modelljét az emberiség létszámának változására az elmúlt évszázad néhány ismert értékének figyelembevételével. A modell szerint a vizsgálat kezdetétől eltelt t idő múlva a lélekszám $N\,(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t}$, ahol N_0 az induló egyedszám, K a körülmények szerint „elviselhető” maximális egyedszám, a pedig a növekedésre jellemző állandó. Tudjuk, hogy 1960 – ban kb. 3 milliárd ember élt a Földön, 1977 – ben $4,1$ milliárd, 1994 – ben pedig $5,5$ milliárd ember élt a Földön.

***a)* Mennyi ember tud még megélni a Földön a modell szerint „legfeljebb”?**

***b)* Mekkora e feltételek mellett az emberiség várható létszáma 2050 – ben, illetve 2100 – ban?**

79. (E) Egy közéleti személyiséget felismer valaki egy kétes hírű bárban. Egy órán belül 4 ismerősének meséli ezt el (később másnakm ár nem), akik hasonló ütemben terjesztik a hírt. Vajon 48 óra múlva hányan tudják a hírt a városban?

Mivel exponenciálisan sokáig nem terjedhet a hír, hiszen egyre többen tudják, s akkor egyre gyakrabban olyannak mesélnék el, aki már ismeri, a logisztikus modellt használjuk azok számának becslésére, akik már tudják a hírt: $N\,(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t}$, ahol N_0, K, a állandók és t óra elteltével $N\,(t)$ ember tudja a hírt. Azt tudjuk, hogy 1 óra múlva 4, 2 óra múlva 16, 3 óra múlva 54 ember hallott a hírről. Ekkor mit mondhatunk: 48 óra múlva hányan hallottak a hírről?

80. (E) Két cég első évi nyereségét összehasonlítva a kisebbé fele annyi volt, mint a nagyobb cégé. A kisebb cég azonban dinamikusabban fejlődik, mint a nagyobb, az ő nyeresége várhatóan évente $2p$ % - kal, míg a nagyobbé csak p % - kal növekszik. Mennyi év múlva éri utol a kisebb cég nyeresége a nagyobb cégét?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(14) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 − 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(21) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(22) Saját anyagok