

Exponenciális, logaritmikus egyenletrendszerek

Exponenciális, logaritmikus egyenletrendszerek megoldása:

A megoldás során arra kell törekednünk, hogy egyszerűbb alakra hozzuk az egyenletrendszert.

Ennek módszerei:

- új ismeretleneket vezetünk be az azonos kifejezésekre,
- külön – külön alakítjuk az egyenleteket a tanult azonosságok segítségével.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. (K) Oldd meg a következő exponenciális egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 2^y = 7 \\ 2 \cdot 3^x + 2^y = 10 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 10^{x-2} + 7^{y+1} = 8 \\ 10^x - 2 \cdot 7^{y+2} = 2 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 7^{x+1} - 6^{y+3} = 1 \\ 6^{y+2} - 7^x = 5 \cdot (6^y + 1) \end{array} \right\}$$

2. (K) Oldd meg a következő exponenciális egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} 7^{2x+y-1} = 49 \\ 2^{x+y+8} = 64 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 8^{xy} = 4 \\ 3^{2x-y} = \sqrt[3]{3} \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 25 \cdot (5^x)^y = 1 \\ 3^y \cdot 27^x = 3 \end{array} \right\}$$

3. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} (25^x)^y = 125 \\ 4^{xy} \cdot 2^x = 2 \cdot 8^{\frac{1}{y}} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 9^{x-1} \cdot 3^y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ 5^{x+3y-1} = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3^{x+2y} = 9 \\ 5^{4x-y} = 125 \cdot \sqrt{5} \end{cases}$$

4. (K) Oldd meg a következő exponenciális egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} 32^{x+y} = 4 \cdot 16^x \\ 27^{x+1} = 9^{3y+4} \cdot 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 7^x - 3^{y+3} = 22 \\ 11 \cdot 7^{x-2} + 2 \cdot 3^y = 13 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3^{x+2} - 5^y = 26 \\ 3^{x+1} + 5^{y-1} = \frac{46}{5} \end{cases}$$

5. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} 5 \cdot 6^x + 8 \cdot 5^y = 13 \\ \frac{5}{6^x} + \frac{8}{5^y} = 13 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 64^x + 64^y = 12 \\ 2^{x+y} = \sqrt[6]{32} \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \sqrt{2^x + 3^y - 6} = 5 \\ 9^y - 4^x = 23 \cdot (2^x + 3^y) \end{array} \right\}$$

6. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} y^{x^2+7x+12} = 1 \\ x + y = 6 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} (2^{x^2+2x-4})^{y^2} = \frac{1}{16} \\ \sqrt{3^x} = \sqrt[6]{27^{y-1}} \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} xy = x^y \\ y^3 = x^2 \end{array} \right\}$$

7. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} \lg x - \lg y = 7 \\ \lg x + \lg y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5 \cdot \log_2 x - 3 \cdot \log_3 y = 9 \\ 2 \cdot \log_2 x + \log_3 y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2 \cdot \lg x + 3 \cdot \lg y = -1 \\ 5 \cdot \lg x + 2 \cdot \lg y = 3 \end{cases}$$

8. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} 3 \cdot \lg(x - 1) - 5 \cdot \lg(y - 4) = 6 \\ \lg(x - 1) + 7 \cdot \lg(y - 4) = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_2(2x + 2) = 2 + \log_3(5 - y) \\ 3 \cdot \log_2(2x + 2) + 2 \cdot \log_3(5 - y) = 16 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \lg x + \lg(y + 2) = 3 \\ 3 \cdot \lg x - \lg(y + 2) = 9 \end{cases}$$

9. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} \log_3 x + \log_y 8 = 5 \\ 4 \cdot \log_3 x + 1 = 3 \cdot \log_y 8 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \log_x 16 + \log_y 9 = 2 \\ \log_x 16 - 5 \cdot \log_y 9 = -2 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \lg^2 x + \lg^2 y = 7 \\ \lg x - \lg y = 2 \end{array} \right\}$$

10. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} \log_2[\log_3(x+y)] = 1 \\ \lg x + \lg y = 3 \cdot \lg 2 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \lg x + \lg y = 2 \\ \lg y - \lg x = \lg 25 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \lg x - \lg y = 2 \\ x - 10y = 900 \end{array} \right\}$$

11. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} \log_4 \frac{x}{y} = 1 \\ \log_{\frac{1}{6}}(xy) = 2 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \log_2 x + 2 \cdot \log_2 6 - \log_2 12 = \log_2(y + 8) \\ 2x^2 + y^2 = 99 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \lg 4 + \lg(x - y) = \lg(x + y) - \lg 3 \\ \lg 2900 - 1 = \lg(x^2 + y^2) \end{array} \right\}$$

12. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} \log_2(x - 1) - \log_2 y = 0 \\ \log_3 x + \log_3(y + 1) = 4 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2 \\ \log_{12} \frac{x}{y} = 1 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} xy = 25 \cdot 3^{1+2\log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_9 4} \\ \log_5 x + \log_5 15 = \log_5(13 + \log_7 7^{y+14}) \end{array} \right\}$$

13. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} \log_5 x + \log_5 y = 1 \\ 2^x - 4 \cdot 8^y = 0 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \log_3[21 - 3 \cdot \log_2(x+2y)] = 2 \\ 88^{x^2} \cdot 88^{y^2} = (88^{13})^4 \end{array} \right\}$$

14. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} \log_3(2x-3) + \log_3 5 = \log_3(4y+15) \\ \log_2(3x-1) + \log_2(y-4) = 9 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 1000 \\ \log_2 \frac{x+y}{x-y} = 1 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \lg(x^2 + y^2) = 2 - \lg 5 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 1,2 + 1 \end{array} \right\}$$

15. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{aligned} 2 \cdot \log_2(x-4) &= \log_2 \frac{y-1}{2} + \log_2 \frac{y+1}{3} \\ \log_5(x+2y+2) - \log_5(x-y+5) &= \log_5 5^{\log_5 3} \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} \log_3 x + \log_9 y &= \frac{3}{2} \\ \log_x 3 + \log_y 9 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} \log_4 x - \log_2 y &= 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

16. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{aligned} 3^x \cdot 2^y &= 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} 3^y \cdot 9^x &= 81 \\ \lg(x+y)^2 - \lg x &= 2 \cdot \lg 3 \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} xy &= 256 \\ 7 \cdot \left(\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \right) &= 50 \end{aligned} \right\}$$

17. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{aligned} x^{\log_3 x} \cdot y^{\log_3 y} &= 243 \\ x^{\log_3 y} \cdot y^{\log_3 x} &= 81 \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} xy &= 300 \\ x^{\lg y} &= 9 \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} \log_5 x + 3^{\log_3 y} &= 2 \\ x^y &= \frac{1}{125} \end{aligned} \right\}$$

18. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{aligned} x^3 &= y^2 \\ \frac{\lg x}{\lg y} &= \lg \frac{x}{y} \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} \frac{1}{\lg x} + \frac{1}{\lg y} &= \frac{5}{6} \\ \frac{\lg x}{\lg y} + \frac{\lg y}{\lg x} &= \frac{13}{6} \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} \log_2^2 x^2 - \sqrt{\log_2^2 x - \log_3 y + 8} &= \log_3 y^4 + 28 \\ 3^{\log_2 x} &= y^3 \end{aligned} \right\}$$

19. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszert! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$\left. \begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_9 x + \log_3 y + \log_9 z &= 2 \\ \log_{16} x + \log_{16} y + \log_4 z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

20. (E) Milyen p paraméter esetén lesz az egyenletrendszernek pontosan egy (számpár) megoldása?

$$\left. \begin{aligned} 5^{\frac{y}{x}} &= 5 \cdot (25^{1-x})^{\frac{1}{x}} \\ (9^y)^{\frac{1}{x}} &= 3^p \cdot \left(27^{\frac{1}{y}}\right)^x \end{aligned} \right\}$$

21. (E) Az a paraméter mely értékénél lesz pontosan egy megoldása az egyenletrendszernek?

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2y} + \frac{2y}{x} &= \frac{17}{4} \\ \log_a(2y - x) + \log_a(x + y) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2011.; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (9) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (13) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (14) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

- (15) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (21) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (22) Saját anyagok