

Másodfokú egyenletrendszerek

Másodfokú egyenletrendszerek megoldása:

A korábban tanult módszerek (behelyettesítő; egyenlő együtthatók; összehasonlító; új ismeretlen bevezetése) segítségével megoldjuk az egyenletrendszereket, de több megoldás esetén ügyelnünk kell a megfelelő megoldaspárok felírására.

Megjegyzés:

Abban az esetben, ha a változók felcserélése után ugyanazt az egyenletrendszert kapjuk, akkor azt szimmetrikus egyenletrendszernek nevezzük és a megoldásaira igaz, hogy $x_1 = y_2$ és $y_1 = x_2$. Azaz, ha kapunk megoldást, akkor a tagok felcserélésével szintén jó megoldás adódik.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x + y = 9 \\ xy = 8 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ xy - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ xy = 6 \end{array} \right\}$$

2. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x + y = \frac{31}{11} \\ xy = \frac{52}{11} \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = -18 \\ xy = 6 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 2xy = -3 \\ 6x + 2y = -3 \end{array} \right\}$$

3. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} 2y + 4x = x^2 + 2 \\ y - x = 1 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 2x^2 + 3y = -1 \\ x - 5y = 6 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \frac{y-4}{x+1} = 3 \\ (y-4) \cdot (x+1) = 12 \end{array} \right\}$$

4. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 + xy = 40 \\ x - y = 2 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 + xy = 2 \\ y - 3x = 7 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ xy + y^2 = 12 \end{array} \right\}$$

5. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 12 \\ x - y = 3 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x + 2y = 14 \\ x^2 + 4y^2 = 100 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right\}$$

6. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 - xy - y^2 = 19 \\ x - y = 7 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 + x - y = 20 \\ x + y + 1 = 5 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{17xy}{4} \\ x + y = 15 \end{array} \right\}$$

7. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 - 3xy + y^2 + x + 20y = 13 \\ x - y = 5 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 + 3x + 4xy - 5y^2 - 2y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 2xy - 4y^2 - 5x - 6y - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 6 = 0 \end{array} \right\}$$

8. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x + y^2 = 7 \\ xy^2 = 12 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 = 4y^2 \\ 2x^2 + 3y^2 - 2y = 9 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} xy = 8 \\ y = x^2 \end{array} \right\}$$

9. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x^2 + 4y^2 = 49 \\ 2x^2 - y^2 = 17 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 39 \\ 2x^2 - 5y^2 = 13 \end{cases}$$

10. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 + y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + 5y = 14 \end{cases}$$

11. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} y^4 - 2x^2 = -7 \\ x^2 + 3y^4 = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^4 + 2y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x^3 - 3y^2 + 1 = 0 \\ 2y^2 - x^6 = 1 \end{cases}$$

12. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10x - 2y + 8 \\ x^2 + y = 10x - 22 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + 10x + y^2 - 2y = -1 \\ x^2 - 8x + y^2 + 4y = 5 \end{cases}$$

13. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x - xy + y = 1 \\ xy = 20 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x - y - 3xy = -47 \\ xy = 14 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} xy + x + y = 29 \\ xy - 2x - 2y = 2 \end{array} \right\}$$

14. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} (x - 1)^2 + 2y = 5 \\ 2y^2 + x^2 - 2x = 4 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 34 \\ y + 4x = 2 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25 \\ (x - 2)^2 + (y + 9)^2 = 10 \end{array} \right\}$$

15. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} \sqrt{x-3} + \sqrt{y-2} = 4 \\ 2 \cdot \sqrt{x-3} - \sqrt{y-2} = -1 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 6 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \sqrt{x-2} + \sqrt{y-2} = 5 \\ \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y-2} = 6 \end{array} \right\}$$

16. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} 2x = 12 - y \\ y = 2 \cdot \sqrt{x} \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} + y = 5 \\ xy = 9y \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x + \sqrt{y} = 2 \end{array} \right\}$$

17. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{aligned} (x+y)^2 - 2xy - y &= (x+y) \cdot (x-y) + 1 \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{5}y &= \frac{7}{30} \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} x + y &= 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{6} \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{3}{8} \\ x + y &= 12 \end{aligned} \right\}$$

18. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{aligned} \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} &= 1 \\ \frac{3}{x+3} &= \frac{2}{y} \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} \frac{y}{x-2} &= 1 \\ xy - 2y &= 4 \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} \frac{1}{x-3} + \frac{2}{y} &= \frac{1}{(x-3) \cdot y} \\ y^2 - 4 \cdot (y-x) &= 9 \end{aligned} \right\}$$

19. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszert! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

A megoldásokat koordináta – rendszerbe helyezve, mennyi a pontok távolsága?

$$\left. \begin{array}{l} 17 + x^2 - y^2 = 10x - 5y \\ 3x + 4y = 25 \end{array} \right\}$$

20. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszert! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$\left. \begin{array}{l} (x - 1) \cdot (y + 2) = 0 \\ (x + 3) \cdot (y - 1) = 0 \end{array} \right\}$$

21. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} xy = 36 \\ 2x^2 + y^2 = 162 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} xy = 6 \\ 2x^2 - 3y^2 = 6 \end{array} \right\}$$

22. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ y^2 + xy = -3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + xy = 35 \\ y^2 + xy = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + xy = 210 \\ y^2 + xy = 231 \end{cases}$$

23. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} x + xy - y = 1 \\ x^2y - xy^2 = -6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + xy = 49 \\ (x + y) \cdot xy = 468 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 \\ xy + 3x + 3y = 7 \end{cases}$$

24. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} xy = 3 \\ x^2 + y^2 + x + y = 14 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 18x + 12y + 9 = 0 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y + 3 = 0 \end{array} \right\}$$

25. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y + 3xy = 9 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 + xy + x = 20 \\ y^2 + xy + y = 10 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x^2 - 4y^2 = 0 \\ xy - y^2 = 2 \end{array} \right\}$$

26. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5y = 4 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} xy - 2y - x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 5y = 5 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 - 10x + 10y = 0 \\ xy - 6x + 3y = 18 \end{array} \right\}$$

27. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 341 \\ x + y = 11 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 26 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 4 \\ xy = 1 \end{array} \right\}$$

28. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} x^3 = 5x + y \\ y^3 = 5y + x \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 1 = 0 \\ (x + y)^4 + x = 2 \end{cases}$$

29. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2-y} = 1 \\ 2y + x = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (2x + y)^2 = 16 \\ x - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 25 \\ x + \frac{1}{y} = 9 \end{cases}$$

30. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = -1 \\ x - 3 = \sqrt{3x + y} \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \sqrt{y^2 + 2x - 5} = 2x + 3 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2} + y = 5 \\ y^2 - x = 7 \end{array} \right\}$$

31. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 200 \\ x + y + \sqrt{xy} = 20 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \sqrt{2x + 1} + y^2 = 4 \\ 4x + y^4 = 17 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 + y} = 3 \\ \sqrt{2x - 2} - 2 \cdot \sqrt{y + 3} = \sqrt{2} - 4 \end{array} \right\}$$

32. (E) Bizonyítsd be, hogy ha x, y valós számok megoldásai a következő egyenletrendszernek, akkor $xy - x - 2 = 0$!

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + 2y^2 - 3xy + 5x - 5y = 0 \\ x^2 + 4x - 2y + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

33. (E) Határozd meg az $ax^2 + bx + c$ polinom együtthatóit úgy, hogy a polinom értéke $x = 1$ esetén 1 legyen, $x = 2$ esetén $\frac{1}{2}$, $x = 3$ esetén pedig $\frac{1}{3}$! Mutasd meg, hogy nincs további olyan x valós érték, amely mellett a polinom értéke $\frac{1}{x}$!

34. (K) Oldd meg a következő egyenlőtlenségrendszereket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \left. \begin{array}{l} (x - 1) \cdot (x + 2) > 0 \\ (x + 5) \cdot (x + 2) < 0 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 - x - 6 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 5x^2 - 7x + 2 < 0 \\ 3x^2 - 2x + 5 > 0 \end{array} \right\}$$

35. (E) Oldd meg a következő egyenlőtlenségrendszert a valós számok halmazán!

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{x^2 - 1}{x + 2} \right| < 1 \\ \frac{4}{x - 2} < 0 \end{array} \right\}$$

36. (E) Oldd meg a következő egyenlőtlenségrendszert az egész számok halmazán!

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 + 2yz \leq 1 + y^2 \\ 3y^2 + 2xz \leq 1 + z^2 \\ 3z^2 + 2xy \leq 1 + x^2 \end{array} \right\}$$

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (3) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Gerócs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (9) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

- (13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Dobcsányi János; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (21) Saját anyagok