

Magasabbfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

Magasabbfokú egyenletek:

A 3, vagy annál nagyobb fokú egyenleteket magasabb fokú egyenleteknek nevezzük.

Megjegyzés:

- Egy n - ed fokú egyenletnek legfeljebb n darab valós megoldása lehet, de megoldó képlet csak negyedfokú egyenletig ismert.
- A harmad és negyedfokú megoldó képlet bonyolultsága miatt a gyakorlatban azonban nem alkalmazható.

Magasabb fokú egyenletek megoldása:

A kettőnél magasabb fokú egyenletek megoldását bizonyos esetekben vissza tudjuk vezetni másodfokú egyenletek megoldására. Az egyszerűbb alakra hozás módszerei:

- Szorzattá alakítás (nevezetes azonosság, kiemelés).
- Új ismeretlen bevezetése.
- Egy ismert megoldás segítségével, elvégezhetjük két polinom osztását.
- A szimmetrikus egyenletek esetében az együtthatók szimmetrikusan helyezkednek el. Ekkor, ha x megoldása az egyenletnek, akkor az $\frac{1}{x}$ is megoldás lesz. Az ilyen tulajdonságú egyenleteket reciprok egyenleteknek nevezzük, ahol a megoldások során alkalmazzuk a következő összefüggést: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^8 = 6561$

b) $x^6 - 64 = 0$

c) $625x^4 - 16 = 0$

d) $x^5 = -32$

e) $8x^3 + 27 = 0$

f) $x^7 - 1 = 0$

2. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 - x^2 = 0$

b) $x^8 = 9x^6$

c) $x^5 + 4x^4 = 0$

d) $x^7 = -5x$

e) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x = 0$

f) $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$

3. (K) Oldd meg a következő egyenleteket új ismeretlen bevezetésével! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x^2 + 2,5x)^2 - 5 \cdot (x^2 + 2,5x) - 6 = 0$

b) $(x - 1)^2 - 5 \cdot (x - 1) + 6 = 0$

c) $(x + 1)^2 + 5 \cdot (x + 1) - 14 = 0$

d) $(x - 2)^2 = 5 \cdot (x - 2) - 6$

e) $\left(\frac{2}{3}x - 5\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}x - 5\right) - 15 = 0$

f) $120 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 154 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) + 45 = 0$

4. (K) Írj fel olyan magasabb fokú egyenletet, amely megoldásai: $\{1; 2; 3\}$!

5. (K) Írj fel olyan magasabb fokú egyenletet, amely minden együtthatója páros szám és megoldásai: $\{-1; 1; -3; 4\}$!

6. (K) Írj fel olyan magasabb fokú egyenletet, amely főegyütthatója negatív szám és megoldásai: $\{0; -1; -2; -3; -4\}$!

7. (K) Az $A = \{-10; -1; 2; 3; 2005\}$ halmaz elemei közül az egyik megoldása a következő egyenletnek: $2x^3 + 12x^2 + 22x + 12 = 0$. Melyik az?

8. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

b) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^6 - 6x^3 + 9 = 0$

d) $x^4 + x^2 - 20 = 0$

e) $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

9. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

b) $x^6 - 35x^3 + 216 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

e) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

f) $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$

10. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

b) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

c) $x^4 - 16x^2 + 63 = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

e) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

f) $x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$

11. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

b) $x^4 - 20x^2 - 125 = 0$

c) $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$

d) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$

e) $x^6 + x^3 - 72 = 0$

f) $x^8 - 14x^4 - 32 = 0$

12. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 + 11x^2 + 28 = 0$

b) $x^6 - 5x^3 - 24 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

d) $x^6 - 4x^3 - 5 = 0$

e) $x^4 - x^2 - 1 = 0$

f) $x^{10} + 244x^5 + 243 = 0$

13. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 - 85x^3 + 324 = 0$

b) $x^6 - 2x^3 - 8 = 0$

c) $x^4 + 2x^2 - 99 = 0$

d) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

e) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$

f) $x^{10} + 37x^5 + 160 = 0$

14. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

b) $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

c) $25x^4 + 74x^2 - 3 = 0$

d) $2x^8 - 7x^4 - 4 = 0$

e) $8x^6 - 9x^3 + 1 = 0$

f) $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ kék

15. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

b) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$

c) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$

d) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$

e) $3x^6 - 4x^3 - 7 = 0$

f) $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$

16. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$

c) $8x^6 - 1027x^3 + 3375 = 0$

d) $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$

e) $64x^4 - 20x^2 + 1 = 0$

f) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

17. (K) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

b) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

c) $64x^6 + 16x^3 + 1 = 0$

d) $16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$

e) $2x^{10} + 497x^5 + 2673 = 0$

f) $81x^8 - 82x^4 + 1 = 0$

18. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x + 3)^4 - 7 \cdot (x + 3)^2 - 18 = 0$

b) $(x + 5)^4 - 13 \cdot (x + 5)^2 - 48 = 0$

c) $(x + 1)^4 - 2 \cdot (x + 1)^2 - 3 = 0$

d) $2 \cdot (x - 2)^6 - 3 \cdot (x - 2)^3 - 2 = 0$

e) $8 \cdot (x - 1)^6 - 215 \cdot (x - 1)^3 - 27 = 0$

f) $(x^2 + x)^2 - 2 \cdot (x^2 + x) = 24$

19. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x - 2)^4 - 5 \cdot (x - 2)^2 + 4 = 0$

b) $(x - 1)^4 + 3 \cdot (x - 1)^2 - 10 = 0$

c) $2 \cdot (2x - 1)^8 - (2x - 1)^4 - 1 = 0$

d) $(2x - 5)^4 - 15 \cdot (2x - 5)^2 - 16 = 0$

e) $36 \cdot (x - 3)^4 - 13 \cdot (x - 3)^2 + 1 = 0$

f) $(x + 3)^4 - 2 \cdot (x + 3)^2 = 7$

20. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(7x^2 - x)^2 - 3 \cdot (7x^2 - x) - 10 = 0$

b) $(2x - 3)^6 + (2x - 3)^3 - 2 = 0$

c) $(x^2 + x)^2 - 2 \cdot (x^2 + x) = 24$

d) $(x^2 - 2)^2 - 3 \cdot (x^2 - 2) = 5$

e) $(x + 1)^4 - (x + 1)^2 - 1 = 0$

f) $(x + 2)^4 - 6 \cdot (x + 2)^2 + 5 = 0$

21. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x + 3)^4 - 2 \cdot (x + 3)^2 - 63 = 0$

b) $(x^2 - 10x)^2 - 8 \cdot (x^2 - 10x) - 384 = 0$

c) $(x^2 - 4x)^2 + 7 \cdot (x^2 - 4x) + 12 = 0$

d) $(x^2 + 5x)^2 - 2 \cdot (x^2 + 5x) = 24$

e) $(x^2 + 3x)^2 - 2 \cdot (x^2 + 3x) = 6$

f) $(x^2 + x)^2 - 3 \cdot (x^2 + x) - 10 = 0$

22. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) - 30 = 0$

b) $(x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 1) = 45$

c) $(x^2 - 4x) \cdot (x^2 - 4x - 3) - 10 = 0$

d) $(x^2 + 6x) \cdot (x^2 + 6x + 4) - 77 = 0$

e) $(x^2 - x) \cdot (x^2 - x + 5) = 14$

f) $(x^2 + 8x + 2) \cdot (x^2 + 8x - 26) + 187 = 0$

23. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x^2 - 2x + 6) \cdot (x^2 - 2x) + 8 = 0$

b) $(x^2 + 2x) \cdot (x^2 + 2x + 1) = 6$

c) $(x^2 + x) \cdot (x^2 + x - 2) = 8$

d) $(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x - 1) - 3 = 0$

e) $(x^2 - 2x) \cdot (-x^2 + 2x + 1) = 2$

f) $(2x^2 - 3x) \cdot (2x^2 - 3x + 5) = 14$

24. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x^2 - 2x)^2 - 11x^2 + 22x + 24 = 0$

b) $(x^2 + 4x)^2 - 3x^2 = 10 + 12x$

c) $(x^2 + 2x)^2 - 14x^2 = 15 + 28x$

d) $(x^2 - 3x)^2 - 8x^2 = 20 - 24x$

e) $(x^2 - 4x)^2 + 2x^2 - 3 = 8x - 1$

f) $(x^2 + 4x - 2)^2 + x^2 + 4x = 14$

25. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x^2 + 2x)^2 + (x + 1)^2 = 13$

b) $(x^2 - 4x)^2 - (x - 2)^2 + 4 = 0$

c) $(x^2 + 2x)^2 + 3 \cdot (x + 1)^2 = 21$

d) $(x^2 + 4x - 2)^2 + (x - 1) \cdot (x + 5) = 9$

e) $(2x^2 - x + 5)^2 + 3 \cdot (2x^2 - x - 1) - 10 = 0$

f) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2) \cdot (x - 3) = 1$

26. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $\frac{1}{2x^2 - 5x - 2} - x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

b) $3x^2 - 36x + \frac{3}{x^2 - 12x - 42} = 136$

c) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$

d) $\frac{1}{x^2 - 3x + 1} - x^2 + 3x + 0,5 = 0$

e) $\frac{3}{x^2 + 3x - 3} - 2x^2 - 6x + 5 = 0$

f) $x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{2x^2 - 8x + 7} = 1$

27. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $20x^2 - \frac{20}{x^2 + 4} = 319$

b) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

c) $\frac{x}{3 \cdot (x^2 - 1)} + \frac{2x}{3 \cdot (1 - x^4)} = \frac{1}{x \cdot (1 + x^2)}$

d) $x^3 + 3x^2 + 3x + \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{57}{8}$

e) $1 - \frac{x^2 - 6x}{1 - x^2 + 6x} = \frac{5}{x^2 - 6x + 5}$

f) $\frac{6}{x^2 + 6x + 7} + (x + 3)^2 = 7$

28. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 4) \cdot (x + 5) = 4$

b) $(x^4 - 16)^2 - 130 \cdot (x^2 - 2)^2 - 520x^2 + 6825 = 0$

c) $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = (2x + 1) \cdot (2x + 2) \cdot (2x + 3)$

d) $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x^2 + 6x + 8) + 24 = 0$

e) $(x^2 + 2)^3 + x^4 = (x^2 - 2x)^2 + 2 \cdot (3x^4 + 4x^2 + 2)$

f) $(8x + 7)^2 \cdot (8x + 6) \cdot (8x + 8) = 72$

29. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$

b) $4x + 11 \cdot \sqrt{x} - 3 = 0$

c) $2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 3 = 0$

d) $x^2 + 5 + \sqrt{x^2 + 5} = 2$

e) $2x^2 - 3 - \sqrt{2x^2 - 3} = 1$

f) $\sqrt{x^2 - x + 1} + x = x^2 + 1$

30. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $4x + 13 \cdot \sqrt{x} + 3 = 0$

b) $x^2 + x + 5 = \sqrt{x^2 + x - 3} + 1$

c) $\sqrt{3x^2 + x} + x^2 - 2 = 4x^2 + x$

d) $2x^2 - 5 + x - \sqrt{2x^2 + x + 2} = 0$

e) $\sqrt[3]{\frac{8x}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{8x}} = 2$

f) $\sqrt[4]{\frac{x^2}{x-1}} - \sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2}} = 2$

31. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $3x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3 = 0$

c) $21x^4 - 200x^3 + 342x^2 + 200x + 21 = 0$

d) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $30x^4 - 17x^3 - 228x^2 + 17x + 30 = 0$

f) $12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0$

32. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^{12} - 5x^8 - 9x^4 + 45 = 0$

c) $x^3 + 7x^2 + 2x - 40 = 0$

d) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$

e) $3x^3 - 8x^2 - 5x + 6 = 0$

f) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

33. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

c) $x^3 - 7x - 6 = 0$

d) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

e) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

f) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$

34. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenletet! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$x^7 - 4x^6 + 8x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0$$

35. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$(1 + x)^4 = 16x^2$$

36. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenletet! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0$$

37. (E) Oldd meg a $3x^{10} + 5x = 7 - \frac{2x^2 + x + 1,7}{3}$ egyenletet, ha $x \geq 1$!

38. (E) Olga azt állítja, hogy a következő két egyenlet harmadfokú, így ezeknek pontosan három különböző megoldása van a valós számok halmazán. Igaz – e a megállapítása?

a) $-4x^3 - x^2 + 7x - 3 = 0$

b) $x^3 + 7x^2 + 10x + 8 = 0$

39. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 - 1 > 0$

b) $x^5 + 32 < 0$

c) $3x^6 - 90 \leq 0$

d) $2x^3 - 250 \geq 0$

e) $x^{10} + x^5 > 0$

f) $9x^8 - x^6 \leq 0$

40. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^4 + x^2 - 6 > 0$

b) $x^8 - 17x^4 + 16 \leq 0$

c) $x^4 + 4x^2 - 32 \geq 0$

d) $2x^6 - 7x^3 - 4 < 0$

e) $-2x^3 - 7x^2 + 15x > 0$

f) $x^{10} - 33x^5 + 32 < 0$

41. (E) Oldd meg a következő magasabb fokú egyenlőtlenséget! (Alaphalmaz: \mathbb{N})

$$x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0$$

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (3) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (9) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

- (13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Dobcsányi János; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (21) Saját anyagok