

## Másodfokú egyenletek

### **DEFINÍCIÓ: (Másodfokú egyenlet)**

Az  $ax^2 + bx + c = 0$  alakban felírható egyenletet ( $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ), ahol  $x$  a változó, másodfokú egyenletnek nevezzük.

### **TÉTEL:**

Az  $ax^2 + bx + c = 0$  másodfokú egyenlet valós gyökei megadhatók a következő megoldó

képlettel:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### Megjegyzés:

- Az  $ax^2 + bx + c$  polinomban az  $a$  -  $t$  a polinom főegyütthatójának nevezzük.
- Mivel az egyenletet beszorozhatjuk, eloszthatjuk egy tetszőleges számmal, ezért a megoldóképlet felírása előtt vizsgáljuk meg, hogy az egyenlet egyszerűbb alakra hozható - e. Az egyenletet célszerű úgy rendezni, hogy az  $x^2$  együtthatója pozitív legyen.
- A megoldóképlet használata során, ha a négyzetgyök értéke egy irracionális szám, akkor kerekített értékkel számolunk tovább, vagy egy tényező kiemelésével egyszerűsítjük a törtet.
- A megoldóképlet használata során, ha a négyzetgyök alatt 0 áll, akkor egy megoldása lesz az egyenletnek, ha pedig a négyzetgyök alatt negatív érték szerepel, akkor nem lesz valós megoldása az egyenletnek. Utóbbi esetben a komplex számok halmazán már lehetséges megoldást keresni.
- Amennyiben  $b = 0$ , vagy  $c = 0$ , akkor hiányos másodfokú egyenletről beszélünk, s azt egyszerűbben is megoldhatjuk: rendezés után négyzetgyökvonással, vagy kiemeléssel.
- Az egyenletek megoldására vannak további módszerek is:

*Példa:*  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , alaphalmaz  $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

*Behelyettesítéssel:* az alaphalmaz elemeit behelyettesítve  $x_1 = 1$  és  $x_2 = 3$  jó megoldás lesz

*Szorzáttá alakítással:* egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = x \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 1) = (x - 1) \cdot (x - 3)$$

*Grafikusan:* teljes négyzetté alakítás után a függvényt ábrázoljuk és zérushelyet keresünk

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$$

*Ezek a módszerek sokszor körülményesek és nem mindig alkalmazhatóak.*

## Gyakorló feladatok

**K:** középszintű feladat

**E:** emelt szintű feladat

1. (K) Oldd meg a következő egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $102 \cdot (x - 11) \cdot (3x + 15) = 0$

b)  $(x + 7)^2 = 64$

c)  $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

d)  $\left(\frac{x}{5} - 2\right)^2 = 0,04$

e)  $(x - 1)^2 = 0$

f)  $(3x - 1)^2 - 16 = 9$

2. (K) Oldd meg a következő egyenleteket szorzattá alakítással! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $x^2 - 6x + 9 = 121$

b)  $4x^2 + 1 = 4x$

c)  $2x^2 - 32x = -128$

d)  $x^2 + 7x + 10 = 0$

e)  $2x^2 + 2x - 24 = 0$

f)  $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0$

**3. (K) Oldd meg a következő egyenleteket teljes négyzetté alakítással! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $x^2 - 2x + 1 = 0$

b)  $x^2 + x + 0,25 = 0$

c)  $9x^2 + 24x + 16 = 0$

d)  $-x^2 + 10 = 3x$

e)  $x^2 - 2x + 8 = 0$

f)  $x^2 + 8x + 12 = 0$

**4. (K) Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $x^2 - 16 = 0$

b)  $x^2 = -2x$

c)  $x^2 - 2x + 1 = 0$

d)  $x^2 + 4x - 5 = 0$

e)  $-x^2 + 2x + 3 = 0$

f)  $-x^2 + 6x - 35 = 0$

g)  $2x^2 + 8x + 6 = 0$

h)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

**5. (K) Oldd meg a következő hiányos másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $2x^2 = 18$

b)  $x^2 - 121 = 0$

c)  $-x^2 + \frac{4}{9} = 0$

d)  $5x^2 - 20x = 0$

e)  $x^2 = 58x$

f)  $8x^2 - 7x = 6x^2 - 12x$

**6. (K) Oldd meg a hiányos másodfokú egyenleteket megoldóképlettel! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $x^2 + 1 = 0$

b)  $x^2 = 15$

c)  $x^2 - 16 = 9$

d)  $x^2 + 3 = 292$

e)  $-2x^2 + 950 = 500$

f)  $3x^2 - 48 = 0$

**7. (K) Oldd meg a hiányos másodfokú egyenleteket megoldóképlettel! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $x^2 + 8x = 0$

b)  $-x^2 - 13x = 0$

c)  $5x^2 = -17x$

d)  $6x^2 - 14x = 0$

e)  $3x^2 + 6x = 8x^2 - 9x$

f)  $4x^2 - 10x = x^2 - 11x$

**8. (K) Oldd meg a másodfokú egyenleteket megoldóképlettel! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $x^2 - 5x - 6 = 0$

b)  $x^2 + x - 12 = 0$

c)  $x^2 - 11x + 18 = 0$

d)  $-x^2 + 12x - 36 = 0$

e)  $x^2 + x - 1 = 0$

f)  $x^2 - 12x + 42 = 0$

**9. (K) Oldd meg a másodfokú egyenleteket megoldóképlettel! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $7x^2 + 4x + 9 = 0$

b)  $-4x^2 + 29x + 24 = 0$

c)  $2x^2 - 5x + 6 = 0$

d)  $16x^2 - 16x + 3 = 0$

e)  $-3x^2 + 5x - 10 = 0$

f)  $4x^2 - 20x + 27 = 0$

**10. (K) Oldd meg a másodfokú egyenleteket megoldóképlettel! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $2x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{35}{4} = 0$

b)  $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2x}{3} + 14 = 0$

c)  $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$

d)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} = 0$

e)  $3,2x^2 - 6,4x + 3,2 = 0$

f)  $0,5x^2 - 0,1x + 0,01 = 0$

**11. (K) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $8x^2 - 8 = -12x$

b)  $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x = 2$

c)  $10x^2 - 20x = -10$

d)  $x^2 + 7x + 8 = 3 - x^2$

e)  $x^2 - 6x + 51 = 10x + 12$

f)  $5x^2 + 2x + 5 = 3x^2 - 3x + 1$

12. (K) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $1,2 = 0,4p^2 - 0,8p$

b)  $25t^2 - 26t + 4 = 100 - 6t$

c)  $x^2 + 12x + 20 = 2x + 11$

d)  $17m^2 + 323m = -84 - 13m^2$

e)  $25n^2 - 26n + 77 = -2n^2 + 4n$

f)  $20c^2 - 110 - 4c = 3c^2 + 10c + 1$

13. (K) A  $2x^2 + 7x + 3 = 0$  egyenlet valós gyökei hogyan helyezkednek el a számegyenesen a  $-1$  - hez képest?

14. (K) Az  $x^2 - 4x - 32 = 0$  egyenletnek van - e egész gyöke a  $] -4; 9[$  intervallumban?

15. (K) A  $0,35x^2 + 0,27x - 0,18 = 0$  egyenlet valós gyökei közül melyik van a  $-1 \leq x \leq 1$  intervallumban?

16. (K) Rendezd növekvő sorrendbe a  $8x^2 - 14x - 15 = 0$  és a  $6x^2 + x - 2 = 0$  egyenletek valós gyökeit!

17. (K) Rendezd csökkenő sorrendbe a következő egyenletek valós megoldásait:  
 $3x - \frac{4}{x} - 1 = 0$  és  $2x^2 - x - 3 = 0$ !

18. (K) Van - e közös megoldása a következő egyenleteknek:  $12x^2 + 17x + 6 = 0$  és a  $24x^2 - 5x - 14 = 0$ ?

19. (K) Van - e prímszám megoldása az  $x^2 - 6 = x$  egyenletnek?

20. (K) Mennyi a  $-3x^2 + 8x - 4 = 0$  egyenlet valós gyökei reciprokának összege?

21. (K) Legyen az  $5x^2 + 9x - 14 = 0$  másodfokú egyenlet valós megoldásainak halmaza  $A$ , a  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  egyenleté pedig  $B$ . Határozd meg a következő halmazok elemeit:  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ !

22. (K) Határozd meg a következő függvények zérushelyeit!

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x^2 + 15x - 12$

b)  $g: [-10; 5[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 7x + 10$

c)  $h(x) = (x^2 - 16x + 39) \cdot (x^2 - 2x - 3)$

23. (K) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $(2x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 + 2x - 8$

b)  $3 \cdot (x^2 + 2x) = 13 - x \cdot (1 + 3x)$

c)  $15 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) = 8 \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)$

d)  $(2x - 7) \cdot (x + 3) + (7x - 1) \cdot (2x + 5) = 46x - 29$

e)  $3 \cdot (x + 4) \cdot (x - 2) - 2 \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) = 5$

f)  $47 - x \cdot (9x + 4) = 2 \cdot (17 - 2x) - 12$

24. (K) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $(2x + 1) \cdot (x - 4) - (x + 2) \cdot (3x - 4) = -6x$

b)  $(x - 7) \cdot (x + 3) + (x - 1) \cdot (x + 5) = 102$

c)  $(3x + 1) \cdot (2x - 3) - 2 \cdot (x + 1) = 7x + 1$

d)  $0,45x^2 + 0,2x - 0,32 = 0,1 \cdot (x^2 - 0,7x - 1,4)$

e)  $10 \cdot (x - 2) + 19 = (5x - 1) \cdot (1 + 5x)$

f)  $(x - 4) \cdot (2x + 3) - (x - 2) \cdot (x + 9) = 7x + 12$

25. (K) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $(2x - 1) \cdot (1 - 2x) = (x + 6)^2 - 58$

b)  $(3x - 4)^2 - (6x - 7)^2 = 0$

c)  $8x^2 - 2 \cdot (x + 4) \cdot (4 - x) = (3x - 5)^2$

d)  $(x + 2)^2 - 3 \cdot (5 - 2x) = 11 \cdot (x - 1)$

e)  $(7 - x) \cdot (x + 3) - (2x - 4)^2 = 20x$

f)  $(x - 4) \cdot (x + 4) - (2x + 3)^2 - 2 = 0$

26. (K) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $(x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 4)^2$

b)  $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2) \cdot (5x + 2) = 96$

c)  $(2x - 4)^2 + 3 \cdot (x + 1)^2 = 2x - 3 \cdot (1 + 4x)$

d)  $(x + 5) \cdot (8 - 7x) - 3 \cdot (2x + 4) + 15x = (x - 9)^2 - (x - 6) \cdot (x + 6) - 90$

e)  $(x + 4)^2 + 2 \cdot (x + 3) \cdot (x + 1) - 5 \cdot (x + 5) = 3x$

f)  $(x - 1)^2 - 2 \cdot (x + 2)^2 + 3 \cdot (x - 3)^2 = 6 \cdot (x - 1)^2 + 30$

27. (K) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $(11 - 7x)^2 - (6x - 5) \cdot (6x + 5) + (2x + 9)^2 - 10 = (3 - 5x)^2$

b)  $2 \cdot (x - 1,5)^2 = 4,75 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$

c)  $\frac{x^2}{3} + 1,5x - 2 = (x - 1)^2 + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}$

d)  $(x + 1,5)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (2x - 1,5)^2$

e)  $2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{19}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$

f)  $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$



28. (K) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot x^2 + \sqrt{8} \cdot x)$

b)  $(1 + 3x)^2 - (3x - 1)^2 = (\sqrt{2} + x) \cdot (\sqrt{2} - x)$

c)  $(1 - \sqrt{2} \cdot x) \cdot (1 + \sqrt{2} \cdot x) = 2 \cdot (2 + x) \cdot (2 - x)$

d)  $(\sqrt{3} + \sqrt{5} \cdot x) \cdot (\sqrt{5} \cdot x - \sqrt{3}) = (x - \sqrt{2})^2 + \sqrt{8} \cdot x - 1$

e)  $(x + \sqrt{5})^2 - 6 \cdot (x + 3) = 2x \cdot (x - 2) - 13 + \sqrt{20} \cdot x$

f)  $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} \cdot x + \sqrt{2} \cdot x^2) + 6x^2 - 28 = (1 - 3x)^2 + (1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})$

29. (K) Rendezd növekvő sorrendbe a következő egyenletek valós gyökeit!

A:  $(1 + 3x)^2 = (1 - x) \cdot (1 + 2x)$  és B:  $(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 4x \cdot (x + 2)$

30. (K) Van – e közös megoldása a következő egyenleteknek?

A:  $x^2 : 2 = 1 : 0, 18$  és B:  $(5x - 1)^2 = (x - 2) \cdot (x + 2)$

31. (E) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) - (x^2 + 3) \cdot (x - 5) + 2x - 33 = 0$

b)  $(x + 2)^3 - 12x = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

c)  $(x + 3)^3 + (2x - 1)^3 = 9x^3 + 110$

d)  $x^2 - 2 \cdot (x + 1)^3 = x^2 - 2 \cdot (1 + x^3) + 6$

e)  $(x - 3)^3 + 2x \cdot (5x + 1) = x^3 - (2x - 1)^2 - 26$

f)  $(x + 2)^4 = (x - 2)^4$

32. (E) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $(x + 3)^3 - (x + 2)^3 = 19$

b)  $x^3 + (2x - 3)^2 - 5 = (x - 1)^3$

c)  $(x - 3)^3 + 2x \cdot (3x + 1) = x^3 - (3x - 1)^2 + 5$

d)  $(x + 2)^3 + 3x^2 - 7 = x^3 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 13$

e)  $(x + 2)^4 = (x - 1)^4 + 12x^3 + 17x^2 + 35x + 15$

f)  $x^2 - (\pi + 1) \cdot x + \pi = 0$

33. (E) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $x^2 - 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot x + 2 \cdot \sqrt{2} = 0$

b)  $3x^2 - 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x = x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 2$

c)  $x^2 - x + \sqrt{2} - 2 = 0$

d)  $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot x + \sqrt{6} = 0$

e)  $\sqrt{6} \cdot x^2 - (2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot x + 2 = 0$

f)  $x^2 - (2 \cdot \sqrt{2} - 1) \cdot x - (2 \cdot \sqrt{2} + 1) = 0$

34. (E) Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

a)  $2x^2 - \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} = 0$

b)  $\sqrt{3} \cdot x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot x \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 0$

c)  $x \cdot (\sqrt{2} \cdot x - 2) + x^2 \cdot (\sqrt{3} \cdot x + 2) = \sqrt{3} \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x + 2$

d)  $5x^2 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot x + 4 = x^2 + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x - 1$

e)  $(\sqrt{2} \cdot x - 2)^2 = (x - 1) \cdot (x + 1)$

f)  $(1 + \sqrt{2}) \cdot x^2 - (1 - \sqrt{2}) \cdot x - 2 \cdot \sqrt{2} = x - 3 + \sqrt{2}$

35. (E) Oldd meg az  $(x; y)$  pozitív egész számpárok halmazán a következő egyenleteket!

a)  $10x^2 - 8x = 6xy - y^2 - 16$

b)  $x^2 - 6xy = 25 - 10y^2$

## **Felhasznált irodalom**

- (1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (3) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Geröcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (9) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

- (13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Dobcsányi János; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) [https://users.itk.ppke.hu/itk\\_dekani/files/matematika/list.html](https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html)
- (21) Saját anyagok