

## Másodfokú törtes egyenletek, egyenlőtlenségek

### Algebrai törtes egyenletek megoldása:

- 1) Első lépésben írjuk fel az értelmezési tartományokat (feltételeket), ha van a tört nevezőjében változó, mert a 0 - val történő osztást nem értelmezzük.
- 2) Ezt követően alakítsuk szorzattá a nevezőket, majd hozzuk közös nevezőre a törteket.
- 3) Végül a közös nevezővel való szorzás után oldjuk meg az egyenletet.
- 4) A kapott értéket vizsgáljuk meg, hogy megfelel – e az értelmezési tartománynak.

### Megjegyzés:

*A törtek elhagyásánál ügyelni kell arra, hogy ha a tört előjele negatív, akkor a keletkező kifejezést zárójelbe kell tenni.*

## Gyakorló feladatok

**K: középszintű feladat**

**E: emelt szintű feladat**

**1. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

$$a) \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{3x+1}{8} = 2$$

$$b) \frac{x-1}{2} - \frac{(x+4)^2}{3} + \frac{(3x+7)^2}{5} = 10$$

$$c) \frac{x^2-7x}{3} - 1 = \frac{11x}{10} - \frac{x-4}{3}$$

$$d) 1 - \frac{2x^2-3x}{2} = \frac{(3x-1)^2}{5} - \frac{(x+3)^2}{5}$$

$$e) \frac{(x-11)^2}{10} - \frac{(6x-1)^2}{5} = 7 - \frac{7x-3}{2}$$

$$f) \frac{(3x-5)^2}{7} = \frac{(2x+3)^2}{3} - 5x + 17$$

**2. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

$$a) \frac{2x+3}{5} - \frac{4x+1}{x+1} = 2x - 3,5$$

$$b) \frac{12}{x} - \frac{7x-6}{6} + 5x - 26 = 0$$

$$c) \frac{2x-3}{7} - \frac{2x-1}{x+3} = -x + \frac{3x+6}{11} + 2$$

$$d) x^2 + \frac{1}{x-6} = x + 30 + \frac{1}{x-6}$$

$$e) \frac{2+x^2-x}{x} = \frac{1}{9} \cdot (5x-1) + \frac{1}{5} \cdot (3x-1)$$

$$f) \frac{x}{3} - \frac{2x+1}{2} + \frac{1-x}{6} = x - \frac{x}{x-3}$$

**3. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $\frac{9}{x} = \frac{x}{4}$

b)  $\frac{x+3}{2} = \frac{8}{x+3}$

c)  $\frac{3}{1-5x} = \frac{5x-1}{7}$

d)  $\frac{7,2x+8,3}{7,2} = \frac{59,76}{51,84-x}$

e)  $\frac{6}{4-14x} = \frac{2-7x}{5}$

f)  $\frac{4-x}{5} = \frac{5}{x+4}$

**4. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

a)  $\frac{3,4x+2,7}{x-3,4} = \frac{x-2,7}{x+3,4}$

b)  $\frac{2x+1}{3-4x} = \frac{3}{3x-4}$

c)  $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$

d)  $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} = 2$

e)  $\frac{-3x^2+x}{3x^2-4x+1} = 3$

f)  $\frac{5x^2+11x-12}{2x^2+7x+3} = 0$

5. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{20}{x^2 - 5x + 4} = 0$$

$$b) \frac{2x}{x+6} = x$$

$$c) \frac{5}{(x-3) \cdot (x+1)} = 1$$

$$d) \frac{2x-2}{x-5} = 2x - 8$$

$$e) \frac{(x-3) \cdot (x+2)}{x-1} = 2$$

$$f) \frac{x^2+6}{x+3} = 2x - 2$$

6. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{3x^2 - 2x}{5x} - \frac{4 - 3x}{x} = x$$

$$b) \frac{8x-5}{2x+5} = 4 - \frac{3x+10}{3x+2}$$

$$c) \frac{2}{x+1} - 2 = \frac{x}{x-1}$$

$$d) \frac{2}{x} + \frac{17}{x+2} = 24$$

$$e) \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{17}{4}$$

$$f) 1 - \frac{x}{1-x} = \frac{5}{5+x}$$

**7. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

$$a) \frac{x}{x+2} + \frac{3x+3}{x-7} = 5$$

$$b) \frac{x}{x+4} + \frac{x}{x-4} = 5\frac{5}{9}$$

$$c) \frac{2x+10}{3x} - \frac{2x+2}{x^2} = 0$$

$$d) \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{x}{x+1} = 6$$

$$e) \frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{49}{x-50} + \frac{50}{x-49}$$

$$f) \frac{3x+2}{x} - \frac{x+2}{2x} = x+1$$

**8. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )**

$$a) \frac{5}{x^2-2x} - \frac{2}{2-x} = 1$$

$$b) \frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{64}{x^2-16}$$

$$c) \frac{2x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} + \frac{x+5}{x^2-1} = 3$$

$$d) \frac{3x+5}{x-3} - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{11x-13}{x^2-9}$$

$$e) \frac{3x-3}{x+2} + \frac{x-7}{x-2} - \frac{6x+3}{x^2-4} = 1$$

$$f) \frac{x-5}{x+5} = \frac{100}{x^2-25} + \frac{x+5}{5-x}$$

9. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{x^2 + 12}{x^2 - 4} = \frac{2x}{x + 2} - \frac{x + 2}{2 - x}$$

$$b) \frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x + 4}{x + 1}$$

$$c) \frac{6}{x^2 - 9} = \frac{3}{x + 3} - \frac{2}{3 - x} - \frac{13 - x}{3 + x}$$

$$d) \frac{x}{2x - 1} - \frac{1}{2x + 1} = \frac{4}{4x^2 - 1}$$

$$e) \frac{24x^2}{9x^2 - 1} + \frac{x - 1}{3x + 1} = \frac{x + 1}{3x - 1}$$

$$f) \frac{2x - 120}{4x^2 - 25} - \frac{3x + 4}{5 - 2x} = \frac{x}{2x + 5}$$

10. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) 7 + \frac{6x}{1 - 3x} = \frac{48}{9x^2 - 1} - \frac{8}{3x + 1}$$

$$b) \frac{8x}{4x - 3} - \frac{3 - 4x}{4x + 3} = \frac{12x + 27}{16x^2 - 9}$$

$$c) \frac{3x - 4}{2x + 1} - \frac{x^2 - 5x}{4x^2 - 1} = 2 - \frac{x + 4}{2x - 1}$$

$$d) \frac{10x}{x^2 - 8x + 16} + \frac{3x}{4 - x} = -1$$

$$e) 3 - \frac{2x}{x - 5} = \frac{-21}{25 - 10x + x^2}$$

$$f) \frac{x}{x + 7} - \frac{2x}{x - 11} = \frac{3x}{(x + 7) \cdot (x - 11)}$$

11. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{2}{x^2 - 4} = \frac{3}{2 - x}$$

$$b) \frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{3x^2 - 38}{x^2 - 1}$$

$$c) 2 - \frac{1}{2-x} = \frac{6-x}{3x^2-12} - \frac{3-x}{x-2}$$

$$d) \frac{x}{x^2-9} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{5}{4x-12}$$

$$e) \frac{x-5}{3x^2-27} + 1 = \frac{1-x}{x+3} - \frac{2+x}{x-3}$$

$$f) \frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{34x}{x^2-16x}$$

12. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{2x-x^2} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$$

$$b) \frac{x+1}{2x+6} - \frac{2x}{3-x} = \frac{9x+45}{2x^2-18}$$

$$c) \frac{16+2x}{3x^2-12} - \frac{x-1}{4+2x} = \frac{-2x-1}{6-3x}$$

$$d) \frac{1}{4x+8} = \frac{20x+1}{4x^2-16} - \frac{7-5x}{x^2-4x+4}$$

$$e) \frac{3x}{x+2} + \frac{5x-5}{2x-4} = \frac{10}{x^2-4}$$

$$f) \frac{2x-1}{x-2} + \frac{3x+1}{x-3} = \frac{5x-14}{x-4}$$

13. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{x}{x-10} - \frac{8}{x-6} = \frac{4x}{x^2 - 16x + 60}$$

$$b) \frac{x}{x-3} + \frac{2}{x+1} - \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} = 0$$

$$c) \frac{3}{x^2 + 2x + 1} - \frac{4}{x^2 - 6x - 7} + \frac{2}{x^2 - 14x + 49} = 0$$

$$d) \frac{x}{x+3} + \frac{2}{(x+1) \cdot (x+3)} = \frac{4x}{x^2 + 4x + 3}$$

$$e) \frac{x}{x+4} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 2x - 8}$$

$$f) \frac{x}{x+5} - \frac{3}{(x+2) \cdot (x+5)} = \frac{2x}{x^2 + 7x + 10}$$

14. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = 3$$

$$b) \frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$$

$$c) \frac{x^2 - x + 16}{x^2 + x + 1} + \frac{36 + x}{x^3 - 1} = -\frac{x + 6}{1 - x}$$

$$d) \frac{1}{2 - 2x} + \frac{5}{4x^2 + 4x + 4} = \frac{3x}{x^3 - 1}$$

$$e) \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} - \frac{x - 1}{3} = \frac{2}{x + 1}$$

$$f) \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} + \frac{2}{x - 1} = \frac{x + 3}{x + 1}$$



15. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x-1}$$

$$b) \frac{3}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{1}{x \cdot (x-1)^2} + \frac{3}{x \cdot (x-3)}$$

$$c) \frac{x^2 - 9x + 20}{x-5} = \frac{x}{x^2 - 4x}$$

$$d) 21 \cdot \frac{1}{25 + x^2 - 10x} - 2 \cdot \frac{x}{x-5} + \frac{6+3x}{x+2} = 0$$

$$e) \frac{x}{x^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{x+2}{(x+2)^2} = 0$$

$$f) \frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{3-x} = \frac{48}{(x-3) \cdot (x+38)}$$

16. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-4} = 0$$

$$b) \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+5}{x-5} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{x+4}{x-4}$$

$$c) \frac{x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x - 14} = \frac{x^2 + x + 6}{3x^2 + 5x - 10}$$

$$d) \frac{1 + \frac{2+x}{2-x}}{1 - \frac{2+x}{2-x}} \cdot \frac{1 - \frac{2-x}{2+x}}{1 + \frac{2-x}{2+x}} = -1$$

$$e) \left(1 + \frac{6}{x^2 - x - 12}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x-3}\right) = 0$$

$$f) (4x+3) \cdot (2x+2) = \frac{9}{(8x+7)^2}$$

17. (E) Oldd meg a következő törtes egyenletet a prímszámok halmazán!

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x+4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x+2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x+3}$$

18. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz:  $\mathbb{R}$ )

$$a) \frac{x \cdot \sqrt{5}}{2x - \sqrt{5}} = \frac{2x}{x \cdot \sqrt{5} - 3}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{6} - x} + \frac{2}{\sqrt{6} + x} = \frac{x}{6 - x^2}$$

$$c) \frac{x - 6}{4x^2 - 12} + \frac{x}{x - \sqrt{3}} = \frac{2x}{x + \sqrt{3}}$$

$$d) \frac{\sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} = 4$$

19. (E) Egy osztályban számolási versenyt rendeztek. A feladat az volt, hogy az alábbi „bonyolult” egyenletek gyökeit ki tudja a lehető leggyorsabban meghatározni. A győztes Aladárnak néhány perc elegendő volt az összes feladat megoldására. Hogyan okoskodhatott?

$$\frac{1}{x \cdot (x + 1)} + \frac{1}{(x + 1) \cdot (x + 2)} = \frac{2}{63}$$

$$\frac{1}{x \cdot (x + 1)} + \frac{1}{(x + 1) \cdot (x + 2)} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{x \cdot (x + 1)} + \frac{1}{(x + 1) \cdot (x + 2)} + \frac{1}{(x + 2) \cdot (x + 3)} = \frac{3}{88}$$

$$\frac{1}{x \cdot (x + 1)} + \frac{1}{(x + 1) \cdot (x + 2)} + \frac{1}{(x + 2) \cdot (x + 3)} + \frac{1}{(x + 3) \cdot (x + 4)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x \cdot (x + 2)} + \frac{1}{(x + 2) \cdot (x + 4)} = \frac{2}{45}$$

## **Felhasznált irodalom**

- (1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (3) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (9) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

- (13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Dobcsányi János; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) [https://users.itk.ppke.hu/itk\\_dekani/files/matematika/list.html](https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html)
- (21) Saját anyagok