

Abszolútértékes elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

DEFINÍCIÓ: (Abszolútérték)

A számegyenesen egy számnak a 0 – tól mért távolságát a szám abszolútértékének nevezzük.
Jele: $|x|$.

Abszolútértékes egyenlet megoldása:

Az abszolútértékes egyenleteket úgy oldhatjuk meg, ha az abszolútérték jelet elhagyjuk. Egy abszolútérték jel elhagyásánál ügyelnünk kell arra, hogy két érték is adódhat, aszerint, hogy az abszolútérték jelen belül egy pozitív szám, vagy egy negatív szám állt - e:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ebből a következőt kapjuk: a pozitív ágon úgy hagyjuk el az abszolútérték jelet, hogy a kifejezés önmaga marad, míg a negatív ágon annak ellentettje adódik. Ügyelnünk kell arra, hogy amennyiben az abszolútérték jel előtt negatív jel szerepel, akkor az elhagyáskor a kifejezést zárójelbe kell tennünk.

A megoldásokat végül ellenőriznünk kell, hogy megfelelnek - e az adott ág feltételeinek.

Megjegyzés:

- *Az abszolútértékes egyenlőtlenségeknél hasonlóan járunk el, mint egyenleteknél, azonban az adott ág megoldását összevetve az ág feltételével egy intervallumot kapunk megoldásként.*
- *Több abszolútértéket tartalmazó egyenlet, illetve egyenlőtlenség esetén több ágra bomlik a megoldás, aszerint, hogy a feltételek a számegyenest mennyi részre bontják fel.*

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|x - 5| = 15,5$

b) $|5x - 3| = 2$

c) $|9 - 4,5x| = 0$

d) $|4x - 7| = 5$

e) $|3,5x - 7| = -3$

f) $|0,6x - 3| = 1,2$

2. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $3 + |x| = 17$

b) $|2x - 5| + 3 = 5$

c) $3 + 2 \cdot |x| = 7$

d) $\left| \frac{3}{2}x + 5 \right| - \frac{7}{2} = 0$

e) $5 - \left| \frac{x}{2} - 1 \right| = 4,2$

f) $\left| \frac{1}{2}x - 9 \right| - \frac{3}{2} = 0$

3. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $1 - |x| = 2 + |x|$

b) $3 \cdot |x| + 2 = 3 \cdot |x| - 3$

c) $2 \cdot |x| - 5 = 7 - |x|$

d) $3 \cdot |x| - 2 = 6 - |x|$

e) $2 \cdot |x| - 4,5 = 5 - \frac{3}{8} \cdot |x|$

f) $0,3 \cdot |x| - 1 = 3 - 0,5 \cdot |x|$

4. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|2x + 8| = x - 1$

b) $|x + 4| = x + 4$

c) $|3x - 2| = 2x - 1$

d) $|4x - 11| = 2x - 7$

e) $|2x - 4| = 4 - 2x$

f) $|x + 5| = -\frac{1}{2}x - 1$

5. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $10x + 6 - |x| = 28$

b) $4 - 5 \cdot |x| = 29 + x$

c) $1 - |4 - x| = 3x + 7$

d) $2 \cdot |x + 1| = 2x + 2$

e) $5x - 3 \cdot |x + 4| = 7x + 6$

f) $x + 2 + 5 \cdot |x - 6| = 10$

6. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{N})

a) $|x - 2| = \frac{x+1}{2}$

b) $|2x + 2| - 3 = \frac{2x+1}{3}$

c) $\frac{x+3}{4} - \frac{|x-4|}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+5}{36}$

d) $5 - |4x - 1| = \frac{3x-2}{6}$

e) $\frac{x-5}{25} - \frac{|x+2|}{4} = \frac{3}{10} - \frac{x-1}{100}$

f) $\frac{7x+4}{5} - x = \frac{|3x-5|}{2}$

7. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $\left| \frac{x}{3} - \frac{5}{2} \right| = x - 2$

b) $\left| \frac{4-3x}{5} \right| = \frac{x}{2} + 2$

c) $\left| \frac{x}{x+1} \right| = \frac{x}{x+1}$

d) $\left| \frac{5x+3}{4-x} \right| = \frac{5x+3}{x-4}$

e) $\left| \frac{2-3x}{1+x} \right| = 1$

f) $\left| \frac{x-7}{x} \right| = 3$

8. (K) A $] -3; 11[$ intervallumnak van – e olyan pontja, amely eleme a következő egyenlet megoldáshalmazának?

$$3 \cdot |x| - \frac{1}{x-3} = 9 - \frac{1}{x-3}$$

9. (K) A $\left[-\frac{7}{9}; \frac{7}{9} \right]$ intervallumnak van – e olyan pontja, amely eleme a következő egyenlet megoldáshalmazának?

$$|x| + 7 - 2x = 8 \cdot |x|$$

10. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|11x - 7| = |19 - 9x|$

b) $|x + 3| = |4 - x|$

c) $|3x + 5| = |2x - 1|$

d) $|3x - 14| = |3x + 26|$

e) $|5 - x| = |x + 4|$

f) $|x + 1| = |2x + 1|$

11. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|x + 5| + |x - 3| = 8$

b) $|x| - |x + 9| = -11$

c) $|x + 3| + |1 - x| = 4$

d) $|x - 2| + |x + 3| = 11$

e) $|x - 4| - |x + 1| = 5$

f) $|3x - 4| + |3x + 4| = 24$

12. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|x - 1| + |x - 2| = 1$

b) $|x| - |x - 2| = 2$

c) $|2x - 3| + |2x + 3| = 14$

d) $|x| + |x - 1| = \frac{1}{2}$

e) $|1 - x| - 2 \cdot |3 + x| = 20$

f) $4 \cdot |6 + x| - 5 \cdot |x - 7| = 8$

13. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|x + 3| + |x - 1| = 3x - 5$

b) $|x + 5| - |2x - 1| = x + 2$

c) $|3 - x| - |4 - x| = 2x + 1$

d) $|x - 3| + |x + 2| = 3x - 1$

e) $|x - 1| + |x + 1| = x + 2$

f) $|x + 3| + |1 - x| = \frac{10 + x}{2}$

14. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|x + 3| - 1 = 2 \cdot |x + 2|$

b) $2 \cdot |x + 2| + |x - 3| = 7 - x$

c) $3 \cdot |2x - 4| - |5 - x| = -3x + 5$

d) $4 - |x - 3| + 3 \cdot |x - 1| = 4x$

e) $3 \cdot |x - 2| - |x + 7| = 2 - x$

f) $|x - 6| - 2 \cdot |x + 2| = 9 - x$

15. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|1 - 2x| + |3x + 2| + |x| = 5$

b) $|x - 2| + |x - 4| - |2x - 6| = 2$

c) $|2x + 1| + |2x + 2| = |2x + 3|$

d) $|2x - 1| + |3x + 2| = 3 - |x|$

e) $|x + 5| + 2 \cdot |x - 1| - 4 \cdot |x + 3| = 5$

f) $|x - 1| - 2 \cdot |x - 2| + 3 \cdot |x - 3| = 4$

16. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $||x + 2| - 3| = 1$

b) $||x - 1| - 2| - 3 = 0$

c) $|2 - |1 - |x|| = 1$

d) $||x - 4| - 4| = 4$

e) $|||x + 2| - 6| - 3| = 1$

f) $|||x| - 2| - 1| - 2| = 2$

17. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|x - 2| + x - 2 = 2$

b) $|2x + 4 - |x|| = 8x - 3$

c) $5 \cdot |3 - |x - 7||^2 = 20$

d) $x^2 + 9 = 6 \cdot |x|$

e) $\left| \frac{3 \cdot |x| - 2}{|x| - 1} \right| = 2$

f) $\left| \frac{4}{2+x} \right| + \left| \frac{2+x}{4} \right| = 2$

18. (E) Melyik az a pozitív valós szám, amely gyöke a következő egyenletnek?

$$|x + 3| - |x - 3| = x^{\frac{|x|}{x}}$$

19. (E) Melyik az a pozitív valós szám, amely gyöke a következő egyenletnek?

$$x^{\frac{|x|}{x}} = -2 \cdot |x| + 3$$

20. (K) Írd fel abszolútértékekkel a következőket: $-4 < x < 4$, illetve $y \leq -3$ vagy $3 \leq y$!

21. (K) Írd fel intervallum jelöléssel a következőket: $|x| > 5$, illetve $|y| \leq 6$!

22. (K) Ábrázold számegyenesen a következőket: $|x| \leq 3$, illetve $|x + 2| > 1$!

23. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|-x| \geq 3$

b) $|2x| + 13 > 10$

c) $|x - 4| < 5$

d) $|5,1 - 6x| < -3,8$

e) $|7x - 1| \geq 9$

f) $|2x - 4| < 6$

24. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|5,2 - 3x| \leq 0$

b) $|3 + x| \geq \frac{1}{2}$

c) $|x - 0,4| \leq 0,6$

d) $\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{2}{5}$

e) $|3,4x - 13,6| > 0$

f) $|1,2x - 5| < 3,1$

25. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|x + 2| \geq x$

b) $|5x - 10| > x + 1$

c) $|x + 3| \leq \frac{1}{2}x + 5$

d) $|2x + 6| < x + 1$

e) $|8x - 5| \leq 3x - 1$

f) $|2x - 7| \geq 5x - 9$

26. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $2 \cdot |x + 1| > x + 4$

b) $-2 \cdot |x - 3| + 4 \geq 1 - x$

c) $3x - 4 \cdot |5x + 6| > 7x - 8$

d) $4 - 2 \cdot |x + 1| \leq x - 3$

e) $\frac{x+10}{2} > |2x + 5|$

f) $\frac{4}{5}x - \left| \frac{7}{6}x + \frac{11}{4} \right| \geq 2 - x$

27. (K) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $7 - |x - 3| \leq 2x + |x - 3|$

b) $|4x - 5| + |5x - 4| \leq 2$

c) $|x - 3| - |x + 1| > 3$

d) $|2x - 3| + |x + 6| \geq 9$

e) $|x - 1| + |x + 1| > 1$

f) $|x - 1| + 3 < \frac{2}{3} \cdot |x + 2|$

28. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $|x - 1| + |2 - x| > 3 + x$

b) $|x + 1| - |2x - 1| > x$

c) $|x + 2| + |x - 4| \geq 2 - x$

d) $3 \cdot |x + 4| - |x - 2| \geq -x + 1$

e) $|2x - 9| + |2x + 5| < 7 - 2x$

f) $3 \cdot |x - 7| - 2 \cdot |x + 1| - 5 > \frac{3}{2}x$

29. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenlőtlenséget! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| > 4$$

30. (E) Oldd meg a következő abszolútértékes egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $||x - 5| - 3| \geq 2$

b) $||x| - 1| - 2 < 3$

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 12; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (9) Gerócs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (12) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (13) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

- (14) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (15) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Fröhlich Lajos; 2007.; Plusz 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából (emeltszint); Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Ruff János; 2016.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (21) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (22) Saját anyagok