Azonosító jel: | | | | | | | | | | | | | | | |

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. május 8.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2018. május 8. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm.

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!

Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya $3:4:5$.

c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe 121,5 cm^2. Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	13 pont	

2. **a)** Határozza meg $\frac{x}{y}$ értékét, ha $\frac{2x+3y}{4x+2y}=\frac{9}{10}$ ($y \neq 0$, $y \neq -2x$).

b) Legyen $f(x)=x^2-11x+30$.

Igazolja, hogy ha $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{x-4}{x-6}$.

c) Oldja meg az $\frac{x-4}{x-6} \leq -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

3. Ágoston a tanév első két hónapjában három osztályzatot szerzett matematikából (osztályzatok: 1, 2, 3, 4 vagy 5). A második osztályzata nem volt rosszabb, mint az első, a harmadik osztályzata pedig nem volt rosszabb, mint a második.

a) Határozza meg a feltételeknek megfelelő lehetőségek (számhármasok) számát!

Ágoston osztálya kétnapos kirándulásra indul. Kulcsosházban szállnak meg egy éjszakára. A tanulók szállásdíja a résztvevők számától független, rögzített összeg. Az egy tanulóra jutó szállásköltség egy hiányzó esetén 120 Ft-tal, két hiányzó esetén pedig 250 Ft-tal lenne több, mint ha az egész osztály részt venne a kiránduláson.

b) Határozza meg az osztály létszámát és a teljes fizetendő szállásdíjat!

a)	5 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	12 pont	

4. Egy adatsokaság hét pozitív egész számból áll. Az adatsokaságnak két módusza van, a 71 és a 75. Az adatsokaság mediánja 72, az átlaga 73, a terjedelme pedig 7.

a) Határozza meg a hét számot!

A 72-nek és az n pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27 720.

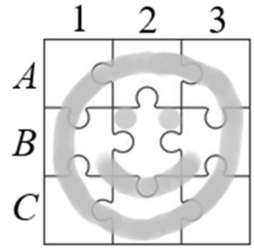
b) Határozza meg az n lehetséges értékeinek számát, és adja meg az n legkisebb lehetséges értékét!

a)	7 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	13 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

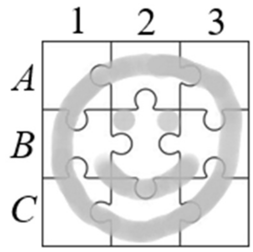
5. Az ábrán egy 3×3-as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ($A1$, $A2$, ... , $C3$) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.



a) Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét!

b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!

c) A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!



d) Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármat úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képben kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódjék legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)?
(Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	2 pont	
d)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

6. Adott az $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$ egyenletű k kör.

a) Igazolja, hogy az $E(-7; 5)$ pont rajta van a k körön!

b) Írja fel a k kör E pontjában húzható érintőjének egyenletét!

c) Határozza meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja!

a)	2 pont	
b)	5 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

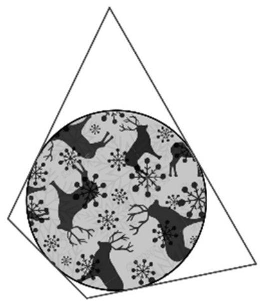
7. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette!

A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a.
Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette!

A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődísz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm.



c) Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza?

a)	6 pont	
b)	3 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

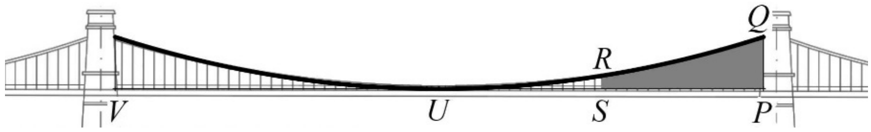
8. **a)** Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!

Van olyan G_1, illetve G_2 fagráf, amelyre igaz, hogy a G_2 csúcsainak száma kétszerese a G_1 csúcsai számának, és a G_2 éleinek száma is kétszerese a G_1 élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.)

Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az *A* vagy a *B* cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?

Az egyik cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.



A híd két támpillérének *PV* távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a *PV* felezőpontja (*U*), a tengelye pedig a *PV* felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ = 16$ méter, a vászon tervezett szélessége $PS = 50$ méter. A tervek szerint a *QR* íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített *PQRS* területet fedi majd be (*RS* merőleges *PS*-re).

c) Hány m^2 területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező?

a)	3 pont	
b)	6 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

9. Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti. Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket.
Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt", azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).
A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.
A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?

b) Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális?

a)	6 pont	
b)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

<table>
<tr><td></td><td rowspan="2">a feladat sorszáma</td><td colspan="4">pontszám</td></tr>
<tr><td>maximális</td><td>elért</td><td>maximális</td><td>elért</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I. rész</td><td>1.</td><td>13</td><td></td><td rowspan="4">51</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II. rész</td><td></td><td>16</td><td></td><td rowspan="4">64</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td colspan="4">Az írásbeli vizsgarész pontszáma</td><td>115</td><td></td></tr>
</table>

dátum

javító tanár

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">pontszáma egész számra kerekítve</td></tr>
<tr><td></td><td>elért</td><td>programba beírt</td></tr>
<tr><td>I. rész</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II. rész</td><td></td><td></td></tr>
</table>

dátum

dátum

javító tanár

jegyző