ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a) első megoldás		
Az első egyenletből $x = 0{,}2 - y$, ezt a másodikba helyettesítve $\frac{\lg(0{,}2-y)+\lg y}{2} = \lg 0{,}1$.	1 pont	
$\lg((0{,}2-y)y) = -2$	1 pont	$\lg\sqrt{(0{,}2-y)y} = -1$
(A logaritmus definíciója miatt) $(0{,}2 - y)y = 0{,}01$,	1 pont	
azaz $y^2 - 0{,}2y + 0{,}01 = 0$.	1 pont	
Innen $y = 0{,}1$ és (visszahelyettesítve) $x = 0{,}1$.	1 pont	
Ellenőrzés például behelyettesítéssel: (az első egyenlet nyilván igaz) a második egyenlet bal oldala: $\frac{2\lg 0{,}1}{2} = -1$, jobb oldala: $\lg\frac{2\cdot 0{,}1}{2} = -1$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. a) második megoldás		
A második egyenlet bal oldalát átalakítjuk: $\frac{\lg x+\lg y}{2} = \frac{\lg xy}{2} = \lg\sqrt{xy}$.	2 pont	
(A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$.	1 pont	
A (pozitív) x és y számokra vonatkozó mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenség miatt	1 pont	
egyenlőség csak $x = y = 0{,}1$ esetén lehetséges.	1 pont	
Ellenőrzés például behelyettesítéssel: (az első egyenlet nyilván igaz) a második egyenlet bal oldala: $\frac{2\lg 0{,}1}{2} = -1$, jobb oldala: $\lg\frac{2\cdot 0{,}1}{2} = -1$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b)		
$2(1-\cos^2 x)-\cos x=2$	1 pont	
$2\cos^2 x+\cos x=0$	1 pont	
$\cos x=0$ vagy $\cos x=-\frac{1}{2}$	1 pont	
$\cos x=0$ a $[-\pi; \pi]$ alaphalmazon pontosan akkor teljesül, ha $x=-\frac{\pi}{2}$ vagy $x=\frac{\pi}{2}$.	1 pont	
$\cos x=-\frac{1}{2}$ a $[-\pi; \pi]$ alaphalmazon pontosan akkor teljesül, ha $x=-\frac{2\pi}{3}$ vagy $x=\frac{2\pi}{3}$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a valós számok halmazán oldja meg az egyenletet, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.
2. Ha a vizsgázó a $\cos x = 0$, *illetve a* $\cos x = -\frac{1}{2}$ *egyenletnek csak a pozitív megoldását adja meg, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.*
3. Ha a vizsgázó a [–180°; 180°] *halmazon (fokokban) oldja meg az egyenletet, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.*

2. a) első megoldás		
Ha (km/h-ban mérve) a személyvonat átlagsebessége v, akkor a gyorsvonat átlagsebessége $v+18$ ($v>0$). A személyvonat menetideje (órában mérve) $\frac{195}{v}$, a gyorsvonat menetideje $\frac{195}{v+18}$.	1 pont	
A feladat szövege szerint: $\frac{195}{v}=\frac{195}{v+18}+0{,}75$.	1 pont	
$195v+3510=195v+0{,}75v^2+13{,}5v$	1 pont	
$0{,}75v^2+13{,}5v-3510=0$	1 pont	$v^2+18v-4680=0$
$v=60$ (vagy $v=-78$, de) a negatív gyök nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
A személyvonat átlagsebessége 60 km/h, a gyorsvonat átlagsebessége (60 + 18 =) 78 km/h.	1 pont	
Ellenőrzés: A gyorsvonat menetideje $(195:78=)$ 2,5 óra, a személyvonat menetideje $(195:60=)$ 3,25 óra. Ez valóban 45 perccel több, mint a 2,5 óra.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. a) második megoldás		
Ha (órában mérve) a gyorsvonat menetideje *t*, akkor a személyvonat menetideje $t + 0{,}75$ ($t > 0$). A gyorsvonat átlagsebessége (km/h-ban mérve) $\frac{195}{t}$, a személyvonat átlagsebessége $\frac{195}{t+0{,}75}$.	1 pont	
A feladat szövege szerint: $\frac{195}{t} = \frac{195}{t+0{,}75} + 18$.	1 pont	
$195t + 146{,}25 = 195t + 18t^2 + 13{,}5t$	1 pont	
$18t^2 + 13{,}5t - 146{,}25 = 0$	1 pont	$8t^2 + 6t - 65 = 0$
$t = 2{,}5$ (vagy $t = -3{,}25$, de) a negatív gyök nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
A gyorsvonat átlagsebessége ($195 : 2{,}5 =$) 78 km/h, a személyvonat átlagsebessége ($78 - 18 =$) 60 km/h.	1 pont	
Ellenőrzés: A személyvonat ($195 : 60 =$) 3,25 óra alatt teszi meg a 195 km-es távolságot. Ez valóban 45 perccel több, mint a 2,5 óra.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

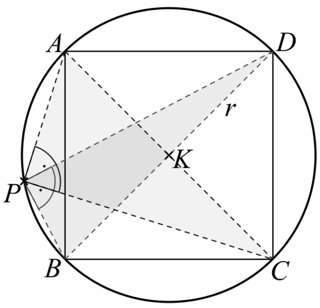
2. a) harmadik megoldás		
(Ha a menetidőt órában, az átlagsebességet km/h-ban mérjük, és) a gyorsvonat menetideje *t*, átlagsebessége pedig *v*, akkor a személyvonat menetideje $t + 0{,}75$, átlagsebessége pedig $v - 18$ ($t > 0$ és $v > 18$).	1 pont	
A feladat szövege szerint: $\left.\begin{array}{r} vt = 195 \\ (v-18)(t+0{,}75) = 195 \end{array}\right\}$.	1 pont	
$\left.\begin{array}{r} vt = 195 \\ -18t + 0{,}75v = 13{,}5 \end{array}\right\}$	1 pont	$\left.\begin{array}{r} vt = 195 \\ -24t + v = 18 \end{array}\right\}$
Behelyettesítő módszerrel: $24t^2 + 18t - 195 = 0$.	1 pont	$v^2 - 18v - 4680 = 0$
$t = 2{,}5$ és $v = 78$ (vagy $t = -3{,}25$ és $v = -60$, de) a negatív gyök nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
A gyorsvonat átlagsebessége 78 km/h, a személyvonat átlagsebessége ($78 - 18 =$) 60 km/h.	1 pont	
Ellenőrzés: A személyvonat ($195 : 60 =$) 3,25 óra alatt teszi meg a 195 km-es távolságot. Ez valóban 45 perccel több, mint a 2,5 óra.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

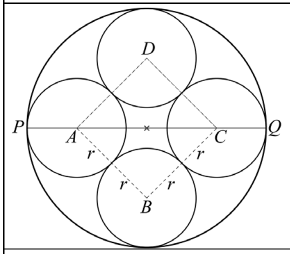
2. b) első megoldás		
Mivel az öt adatnak egyetlen módusza van, ezért az ötödik adat csak a négy ismert adat valamelyike lehet (90, 150, 160 vagy 200).	1 pont	

Az ötödik adat nem lehet 150 vagy 160, mert akkor a módusz és a medián megegyezne.	1 pont	
Az ötödik adat nem lehet a 90 sem, mert akkor az átlag $(690:5=138)$ nem szerepelne az adatok között.	1 pont	
Ha az ötödik adat (a pénteki utasok száma) a 200, akkor az öt adat átlaga $(800:5=)$ 160,	1 pont	
ami minden feltételnek megfelel: a módusz 200, a medián pedig 160 (ami egyben az öt adat átlaga is). (Pénteken tehát 200 utast számláltak.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. b) második megoldás		
Mivel az öt adatnak egyetlen módusza van, ezért az ötödik adat csak a négy ismert adat valamelyike lehet (90, 150, 160 vagy 200).	1 pont	
Az öt adat átlaga nagyobb 90-nél és kisebb 200-nál, tehát az átlag 150 vagy 160 lehet.	1 pont	
Az átlag nem lehet 150, mert akkor az ötödik adat $(5\cdot 150-600=)$ 150 lenne, ekkor pedig a módusz és a medián megegyezne.	1 pont	
Ha az átlag 160, akkor az ötödik adat (a pénteki utasok száma) $(5\cdot 160-600=)$ 200,	1 pont	
ami minden feltételnek megfelel: a módusz 200, a medián pedig 160. (Pénteken tehát 200 utast számláltak.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen válaszol a feladat kérdésére, és válaszát a feladat szövege alapján ellenőrzi, de nem mutatja meg, hogy más megoldás nincs, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

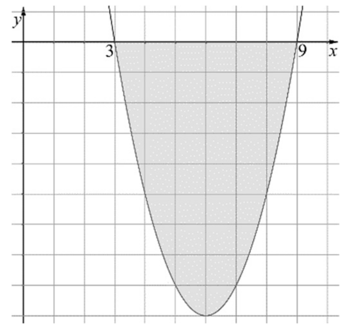
3. a)		
 (AC, illetve BD a kör egy-egy átmérője, ezért) a Thalész-tétel miatt $APC\angle = 90°$ és $BPD\angle = 90°$.	2 pont	
(A körülírt kör sugarát r-rel jelölve, a Pitagorasz-tétel miatt) $AP^2+CP^2=AC^2=(2r)^2$ és $BP^2+DP^2=BD^2=(2r)^2$.	1 pont	
Tehát $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$, ami a bizonyítandó volt.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b) **első megoldás**		
(A forgásszimmetria miatt) a négy pohár alapkörének négy középpontja egy négyzet négy csúcsa.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
 (Az érintkező körök középpontjai és az érintési pont egy egyenesre esnek, így) a négyzet oldala ugyanakkora, mint egy pohár átmérője: $2r$.	1 pont	
A négyzet AC átlójának hossza $2r\sqrt{2}$.	1 pont	
A PQ átmérőre igaz, hogy $20 = 2r+2r\sqrt{2}$,	1 pont	
ahonnan $r = \dfrac{10}{1+\sqrt{2}} = 10(\sqrt{2}-1) > 4{,}1$ (cm), tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b) **második megoldás**		
Helyezzünk el négy darab 4,1 cm alapkör sugarú poharat egy négyzet csúcsaiban úgy, hogy az alapkörök középpontja négyzetcsúcs legyen, és a szomszédos csúcsokban elhelyezett poharak érintsék egymást.	1 pont	*Ez a pont egy megfelelő ábra esetén is jár.*
A négyzet oldala $(2\cdot 4{,}1 =)$ 8,2 cm, átlója pedig $(8{,}2\cdot\sqrt{2} \approx 11{,}597 <)$ 11,6 cm hosszú.	1 pont	
$11{,}6 + 2\cdot 4{,}1 = 19{,}8$, ezért a négyzet középpontja körül 9,9 cm-es sugárral megrajzolt körön belül lesz mind a négy pohár alapköre.	1 pont	
Ezért ha a 4,1 cm sugarú poharakat egy 20 cm átmérőjű tálcára helyezzük, akkor azok nem érinthetik egymást és a tálca oldalfalát is a feladat szövegében leírt módon.	1 pont	
Ehhez a poharak alapkörének sugarát növelni kell, tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. c)		
Mivel a pohár fala 2,5 mm vastag, így a belső sugara nagyobb, mint (4,1 – 0,25 =) 3,85 cm.	1 pont	
A pohár térfogata: $V_{\text{pohár}} > 3{,}85^2\cdot\pi\cdot 11 \approx 512$ cm^3.	1 pont	
1 dl = 100 cm^3,	1 pont	512 cm^3 = 5,12 dl
tehát igaz, hogy belefér 5 dl üdítő a pohárba.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések:
1. A sugárra a b) részben kapott pontos értéket használva $V_{\text{pohár}} > 523$ cm^3 adódik.
2. Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlőséggel számol, akkor teljes pontszámot kaphat.

4. a)		
A függvény zérushelyeinek kiszámítása: $x^2 - 12x + 27 = 0$, innen $x_1 = 3$, $x_2 = 9$.	1 pont	
(A függvényértékek a két zérushely között negatívak, ezért a kérdezett *T* területre fennáll:) $-T = \int_3^9 (x^2 - 12x + 27)\mathrm{d}x =$ $= \left[\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 27x \right]_3^9 =$	1 pont	
$= \left(\frac{9^3}{3} - 6 \cdot 9^2 + 27 \cdot 9 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 6 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 \right) =$	1 pont	
$= (0 - 36 =) -36$.	1 pont	
A kérdezett terület nagysága tehát 36 (területegység).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b)		
Az *E*-ben húzott érintő meredekségét az *f* derivált-függvényének az $x = 5$ helyen felvett helyettesítési értéke adja meg.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(x) = 2x - 12$	1 pont	
$f'(5) = -2$	1 pont	
Az érintő egyenlete: $y + 8 = -2(x - 5)$.	2 pont	$y = -2x + 2$
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az érintő egyenletét koordinátageometriai módszerrel határozza meg, akkor 1 pontot kapjon annak megállapításáért, hogy a keresett érintő egyenlete felírható $y = m(x - 5) - 8$ alakban (mert az $x = 5$ egyenes nem érintő).
További 2 pontot kapjon azért, ha az egyenes és a parabola egyenletéből alkotott egyenletrendszerből eljut annak megállapításáig, hogy az $x^2 - (12 + m)x + 5m + 35 = 0$ egyenlet diszkriminánsa, az $m^2 + 4m + 4$ összeg, nullával egyenlő.
Ebből az $m = -2$ meghatározásáért 1 pontot,
a keresett érintő egyenletének felírásáért pedig további 1 pontot kapjon.

4. c)		
A parabola $y = x^2 - 12x + 27$ alakú egyenletét $y = (x-6)^2 - 9$ alakban írva adódik, hogy	1 pont	$y + 9 = (x - 6)^2$
a tengelypontja *T*(6; –9),	1 pont	
paramétere $p = 0,5$.	1 pont	
(Mivel $\frac{p}{2} = 0,25$, ezért) a fókuszpont: *F*(6; –8,75).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II.

5. a)		
c kezdőszámjegy (a $\overline{c3c5}$-ben), ezért $c \neq 0$.	1 pont	$c \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
$\overline{1c28}$ (mindig páros, ezért) 6-tal akkor nem osztható, ha 3-mal nem osztható, tehát ha a számjegyeinek összege nem osztható 3-mal: $c \notin \{1; 4; 7\}$.	1 pont	$c \in \{2; 3; 5; 6; 8; 9\}$
$\overline{93c6}$ akkor osztható 36-tal, ha 4-gyel és 9-cel is osztható.	1 pont	
9-cel akkor osztható, ha a számjegyek összege osztható 9-cel, ez ($c = 0$ kizárása után csak) $c = 9$ esetén teljesül.	1 pont	
Ekkor azonban 9396 osztható 4-gyel is, ezért $c \neq 9$.	1 pont	$c \in \{2; 3; 5; 6; 8\}$
$\overline{c3c5}$ mindig osztható 5-tel, ezért 15-tel akkor nem osztható, ha 3-mal nem osztható, tehát ha a számjegyeinek összege nem osztható 3-mal: $c \notin \{2; 5; 8\}$.	1 pont	
Így a megfelelő értékek: $c = 3$ és $c = 6$.	1 pont	$c \in \{3; 6\}$
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó a megoldásában nem említi a 3*-mal, illetve a* 9*-cel való oszthatóság szabályát, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

2. Ha a vizsgázó a c számjegy 10 lehetséges értékét szisztematikusan végigpróbálja, és ezt dokumentálja, akkor a két helyes érték (a 3 *és a* 6*) azonosításáért 1-1 pontot, a* 0 *számjegy kizárásáért pedig további 1 pontot kapjon. Összesen 4 pont jár a maradék hét számjegy kizárásáért. Ha ebben egy hibát követ el, akkor ebből a 4 pontból 2 pontot, ha egynél több hibát követ el, akkor pedig 0 pontot kapjon.*

5. b)		
A $4^n + 6n - 1$ összeg minden pozitív egész n esetén páratlan (mert az összegnek egy páratlan tagja van),	1 pont	
tehát sohasem osztható 8-cal.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5. c) első megoldás		
(Teljes indukciót alkalmazunk.) Ha $n = 1$, akkor az állítás igaz, mert a 9 osztható 9-cel.	1 pont	
Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy k pozitív egész számra, azaz $4^k + 6k - 1$ osztható 9-cel.	1 pont	
Ekkor igazolnunk kell, hogy az állítás igaz $k + 1$-re is, azaz $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$ is osztható 9-cel.	1 pont	
$4^{k+1} + 6(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 6k + 5 =$ $= 4 \cdot (4^k + 6k - 1) - 18k + 9$	2 pont*	
$4 \cdot (4^k + 6k - 1)$ az indukciós feltevés szerint, a $-18k$, illetve a 9 pedig nyilvánvalóan osztható 9-cel,	1 pont*	
ezért ezek összege (azaz a $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$) is osztható 9-cel. (Ezzel az állítást igazoltuk.)	1 pont*	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Tekintsük a két szám különbségét: $(4^{k+1} + 6(k+1) - 1) - (4^k + 6k - 1) = 3 \cdot 4^k + 6 =$ $= 3 \cdot (4^k + 2)$.	1 pont	
4^k maradéka 3-mal osztva 1, ezért $4^k + 2$ osztható 3-mal, így $3 \cdot (4^k + 2)$ osztható 9-cel.	1 pont	
Ha $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$ és $4^k + 6k - 1$ számok különbsége is és (az indukciós feltevés miatt) $4^k + 6k - 1$ is osztható 9-cel, akkor $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$ is osztható 9-cel. (Ezzel az állítást igazoltuk.)	2 pont	

5. c) második megoldás		
(Esetszétválasztást végzünk az n 3-mal való osztási maradéka alapján.) Ha n maradéka 3-mal osztva 0 ($n = 3k$, $k \in \mathbf{N}^+$), akkor 9-cel osztva ($4^{3k} = 64^k = (9 \cdot 7 + 1)^k$ miatt) 4^n maradéka 1; $6n$ maradéka 0.	2 pont	
Ha n maradéka 3-mal osztva 1 ($n = 3k + 1$, $k \in \mathbf{N}$), akkor 9-cel osztva ($4^{3k+1} = 4 \cdot 64^k$ miatt) 4^n maradéka 4; $6n$ maradéka 6.	2 pont	
Ha n maradéka 3-mal osztva 2 ($n = 3k + 2$, $k \in \mathbf{N}$), akkor 9-cel osztva ($4^{3k+2} = 16 \cdot 64^k = (9+7) \cdot 64$ miatt) 4^n maradéka 7; $6n$ maradéka 3.	2 pont	
Mindhárom esetben $4^n + 6n - 1$ maradéka 9-cel osztva 0. (Ezzel az állítást beláttuk.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
A binomiális tételt alkalmazzuk: $4^n = (3+1)^n = 3^n + \binom{n}{1} \cdot 3^{n-1} + ... + \binom{n}{n-1} \cdot 3 + 1$.	2 pont	
A felírásban az utolsó két tag kivételével mindegyik tag osztható 9-cel,	1 pont	
elegendő tehát az $\binom{n}{n-1} \cdot 3 + 1 + 6n - 1$ kifejezés 9-cel való oszthatóságát vizsgálni.	1 pont	
$\binom{n}{n-1} \cdot 3 + 1 + 6n - 1 = n \cdot 3 + 6n = 9n$,	1 pont	
ez a kifejezés tehát mindig osztható 9-cel.	1 pont	
Tehát $4^n + 6n - 1$ maradéka 9-cel osztva 0. (Ezzel az állítást beláttuk.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. c) negyedik megoldás		
$4^n - 1 = 4^n - 1^n = (4-1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1) =$ $= 3 \cdot (4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1)$.	1 pont	
Mivel $4^n + 6n - 1 = 3 \cdot (4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1) + 6n =$ $= 3 \cdot (4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1 + 2n)$,	1 pont	
ezért elegendő bizonyítani, hogy $4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1 + 2n$ osztható 3-mal.	1 pont	
A $4^q = (3+1)^q$ ($q \in \mathbf{N}$) hatvány 3-mal való osztási maradéka mindig 1 (hatvány maradéka megegyezik a maradék hatványával, illetve annak a maradékával),	1 pont	
ezért a $4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1$ (n tagú) kifejezés 3-mal való osztási maradéka n. (Összeg maradéka megegyezik a maradékok összegével, illetve annak a maradékával.)	1 pont	
$4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1 + 2n$ maradéka tehát $n + 2n = 3n$ maradékával egyezik meg (vagyis 0).	1 pont	
Tehát $4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1 + 2n$ osztható 3-mal. (Ezzel az állítást beláttuk.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. a)		
200 liter = 200 dm^3	1 pont	
A hordó alapterülete $\left(\frac{200}{8}=\right)$ 25 dm^2,	1 pont	
a sugara pedig $\left(\sqrt{\frac{25}{\pi}}\approx\right)$ 2,82 dm.	1 pont	
A palást területe $(2\pi\cdot 2{,}82\cdot 8\approx)$ 142 dm^2,	1 pont	
a hordó körülbelül 167 dm^2 területű lemezből áll.	1 pont	
A hordó gyártásához $\frac{167}{0{,}88}\approx 190$ dm^2 lemezre van szükség.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. b)		
(Minden hosszúságot dm-ben mérünk, r a henger sugara, m pedig a magassága.) A felül nyitott henger térfogata: $r^2\pi m = 200$, felszíne: $r^2\pi + 2r\pi m$.	1 pont	
$m=\frac{200}{r^2\pi}$, ezzel a 200 literes henger felszíne $A(r)=\left(r^2\pi+2r\pi\cdot\frac{200}{r^2\pi}=\right) r^2\pi+\frac{400}{r}$.	2 pont	
Az $A(r)=r^2\pi+\frac{400}{r}$ $(r>0)$ függvény deriválható, és ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$A'(r)=2r\pi-\frac{400}{r^2}$	1 pont*	
$2\pi r-\frac{400}{r^2}=0$, amiből $r=\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ $(\approx 3{,}99)$.	2 pont*	
Az A függvény második deriváltja mindenhol pozitív, tehát a $\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ ennek a függvénynek (abszolút) minimumhelye.	1 pont*	$A''(r)=2\pi+\frac{800}{r^3}$
A legkisebb felszínű, felül nyitott forgáshenger sugara körülbelül 3,99 dm,	1 pont	
magassága $\frac{200}{r^2\pi}\approx 3{,}99$ dm. (A legkisebb felszín $3\cdot\sqrt[3]{40000\pi}\approx 150$ dm^2.)	1 pont	$m^3=\frac{200^3}{\frac{200^2}{\pi^2}\cdot\pi^3}=\frac{200}{\pi}=r^3$, *tehát $m=r$.*
Összesen:	**10 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

$A(r) = r^2\pi + \frac{400}{r} = r^2\pi + \frac{200}{r} + \frac{200}{r}$.	1 pont	
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján: $A(r) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{r^2\pi \cdot \frac{200}{r} \cdot \frac{200}{r}} = 3 \cdot \sqrt[3]{40000\pi}$.	2 pont	
Egyenlőség pontosan akkor lehet, ha $r^2\pi = \frac{200}{r}$,	1 pont	
vagyis $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ ($\approx 3{,}99$).	1 pont	

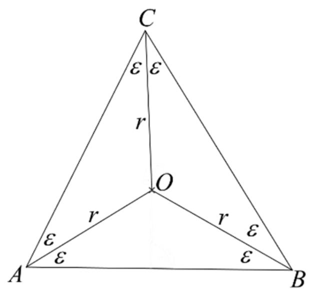
7. a) első megoldás		
A megfigyelt szabályszerűség azt jelenti, hogy a harmadik órától kezdve minden órában megduplázódik az addigi összes megfertőződött cellák száma.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Így (mivel a második órában 7 fertőzött cella van) az n-edik órában ($n \geq 2$) az összes fertőzött cella száma $7 \cdot 2^{n-2}$.	2 pont	
Megoldandó ezért a $7 \cdot 2^{n-2} > 10\,000\,000$ egyenlőtlenség.	1 pont	
A lg függvény szigorúan monoton növekedő, ezért (a 7-tel való osztás után az egyenlőtlenség mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát véve)	1 pont	
$(n-2) \cdot \lg 2 > \lg \frac{10\,000\,000}{7}$.	1 pont	
$n > \frac{\lg \frac{10\,000\,000}{7}}{\lg 2} + 2 \approx 22{,}4$	1 pont	$n > 2 + \log_2 \frac{10\,000\,000}{7}$
Azaz a fertőzött cellák száma a 23. órában haladná meg a tízmilliót.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

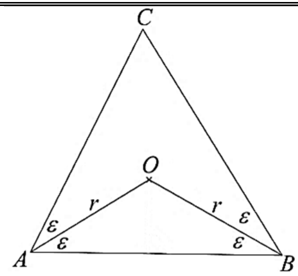
7. a) második megoldás		
A megfigyelt szabályszerűség azt jelenti, hogy a negyedik órától kezdve minden órában kétszer annyi cella fertőződik meg, mint a megelőző órában.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megoldandó ezért az alábbi egyenlőtlenség: $3 + 4 + 7 + 14 + ... + 7 \cdot 2^k > 10\,000\,000$ (ahol k a harmadik óra után eltelt órák számát jelöli).	1 pont	
A mértani sorozat összegképletét alkalmazva: $7+7\cdot\frac{2^{k+1}-1}{2-1} > 10\,000\,000$.	1 pont	
Rendezve: $2^{k+1} > \frac{10\,000\,000}{7}$.	1 pont	
A 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért	1 pont	
$k+1 > \frac{\lg\frac{10\,000\,000}{7}}{\lg 2} \approx 20{,}4$.	1 pont	$k+1 > \log_2\frac{10\,000\,000}{7}$
$k + 3 > 22{,}4$	1 pont	
Azaz a fertőzött cellák száma a 23. órában haladná meg a tízmilliót.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

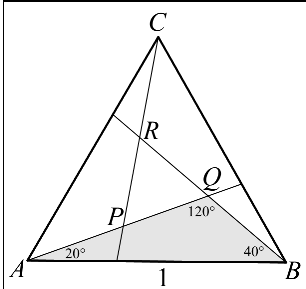
Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, majd a baktériumok számának monoton növekedésére hivatkozva jó választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.
Ha egyenletet old meg, de a megoldás után indoklás nélkül ad választ a feladat kérdésére, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.
2. Ha a vizsgázó óráról órára jól kiszámítja a fertőzött cellák számát, ezt dokumentálja, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

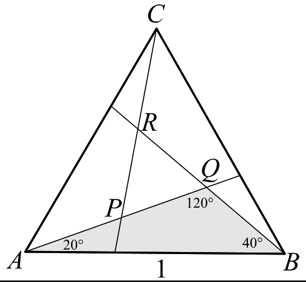
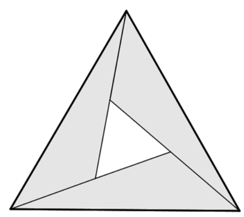
7. b)		
A modell szerint mindegyik dobásnál vagy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elpusztul egymillió baktérium, vagy $\frac{1}{6}$ valószínűséggel egymillióval nő, vagy $\frac{1}{3}$ valószínűséggel változatlan marad a baktériumok száma.	1 pont	
Legfeljebb ötmillió baktérium akkor marad a hetedik dobás után, ha a hét dobás közül legalább öt alkalommal 1-et, 2-t vagy 3-at dobtak (azaz csökkent a baktériumok száma).	2 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

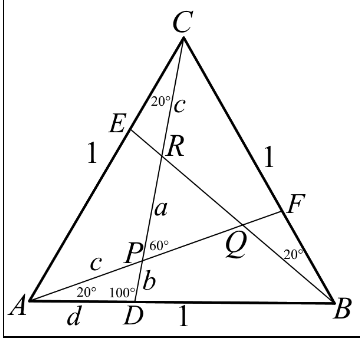
Ha pontosan öt alkalommal dobtak 1-et, 2-t vagy 3-at, akkor a másik két alkalommal 4-et vagy 5-öt dobtak (azaz mindkétszer változatlan maradt a baktérium-szám). Ennek a valószínűsége: $\binom{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $(\approx 0{,}073)$.	1 pont	
Ha pontosan hat alkalommal dobtak 1-et, 2-t vagy 3-at, akkor a maradék egy alkalommal 4-et vagy 5-öt dobtak (azaz nem történt változás), vagy egy alkalommal 6-ot dobtak (azaz növekedett a baktériumok száma). Ennek a valószínűsége: $\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{3}+\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6}$ $(\approx 0{,}055)$.	2 pont	*Ha pontosan hat alkalommal dobtak* 1-*et,* 2-*t vagy* 3-*at, akkor a maradék egy alkalommal* 4-*et,* 5-*öt vagy* 6-*ot dobtak. Ennek a valószínűsége:* $\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{2}$.
Annak a valószínűsége, hogy pontosan hétszer dobtak 1-et, 2-t vagy 3-at: $\left(\frac{1}{2}\right)^7$ $(\approx 0{,}008)$.	1 pont	
A kérdezett valószínűség (a három egymást páronként kizáró lehetőség valószínűségének összege, azaz) körülbelül $(0{,}073 + 0{,}055 + 0{,}008 =)$ $0{,}136$.	1 pont	*A valószínűség pontos értéke* $\frac{13}{96}$ $(\approx 0{,}135)$.
Összesen:	**8 pont**	

8. a) első megoldás		
Az állítás megfordítása: *Ha egy háromszög körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával, akkor a háromszög szabályos.*	1 pont	
A beírt kör középpontja (a háromszög belső pontja) a belső szögfelezők közös pontja, amely most egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól (mert a körülírt körnek is középpontja),	1 pont	
ezért a két kör közös középpontját a háromszög csúcsaival összekötő szakaszok három egyenlő szárú háromszögre bontják az eredeti háromszöget. A szögfelezők miatt ezeknek a háromszögeknek az alapon fekvő szögeik mind ugyanakkorák.	1 pont	
Ezért az eredeti háromszög három belső szöge egyenlő nagyságú, tehát az eredeti háromszög szabályos.	1 pont	
Összesen	**4 pont**	

8. a) **második megoldás**		
Az állítás megfordítása: *Ha egy háromszög körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával, akkor a háromszög szabályos.*	1 pont	
A beírt kör középpontja (a háromszög belső pontja) a körülírt körnek is középpontja, ezért egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól. Tehát (az ábra jelölései szerint) az AOB háromszög egyenlő szárú (ezért $OAB\angle = OBA\angle = \varepsilon$).	1 pont	
A beírt kör középpontja az AO és BO belső szögfelezők közös pontja, ezért az ABC háromszög AB oldalán fekvő két belső szöge egyenlő (2ε). Az ABC háromszög tehát egyenlő szárú: $AC = BC$.	1 pont	
A gondolatmenetet (pl. a BOC háromszögre) megismételve kapjuk, hogy $AB = BC = CA$, tehát a háromszög szabályos.	1 pont	
Összesen	**4 pont**	

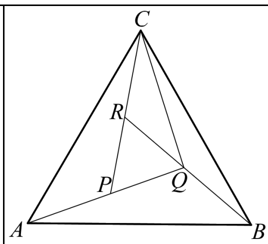
8. b) **első megoldás**		
 Az ABQ háromszög szögei 20°, 40° és 120°.	1 pont	
(Az ABQ háromszögből szinusztétellel:) $\frac{BQ}{1} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 120^\circ}$,	1 pont	
ahonnan $BQ \approx 0{,}395$.	1 pont	
$\frac{AQ}{1} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ}$,	1 pont	
ahonnan $AQ \approx 0{,}742$.	1 pont	
$BQ = AP$ (mert az ábra forgásszimmetrikus)	1 pont	
Így $PQ = AQ - AP \approx 0{,}347$.	1 pont	
Összesen	**7 pont**	

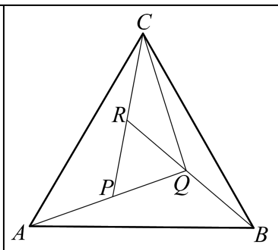
8. b) **második megoldás**		
 Az *ABQ* háromszög szögei 20°, 40° és 120°.	1 pont	
(Az *ABQ* háromszögből szinusztétellel:) $\frac{AQ}{1}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ}$	1 pont	*Ez a 3 pont jár, ha a vizsgázó (az AQ szakasz hosszának kiszámítása nélkül) az* $\frac{AB^2\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ}{2\cdot\sin 120^\circ}$ *képlet alkalmazásával számítja ki az ABQ háromszög területét.*
ahonnan $AQ\approx 0{,}742$.	1 pont	
Az *ABQ* háromszög területe: $\frac{AB\cdot AQ\cdot\sin 20^\circ}{2}=$ $=\frac{1\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 20^\circ}{2\cdot\sin 120^\circ}\approx 0{,}127$.	1 pont	
(Az *ABQ*, *BCR* és *CAP* háromszögek egybevágók, ezért) a *PQR* szabályos háromszög területe $T_{PQR}=T_{ABC}-3T_{ABQ}=$ $=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 20^\circ}{2\cdot\sin 120^\circ}\approx 0{,}433-0{,}381=0{,}052$.	1 pont	
Így $PQ=\sqrt{\frac{4\cdot T_{PQR}}{\sqrt{3}}}\approx\sqrt{\frac{0{,}208}{1{,}732}}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}347$.	1 pont	
Összesen	**7 pont**	

8. b) **harmadik megoldás**		
 Az ábra szerinti jelöléseket alkalmazzuk: a *PQR* szabályos háromszög oldalának hossza *a*, az *APD* háromszög oldalai *b*, *c* és *d*. $CR=AP=c$ (mert az ábra forgásszimmetrikus).	1 pont	
Az *ADC* háromszög szögei 20°, 100° és 60°. (Ebből a háromszögből szinusztétellel:) $\frac{CD}{1}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 100^\circ}$, azaz $CD=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 100^\circ}$,	1 pont	

illetve $\frac{d}{1}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}$, azaz $d=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}$.	1 pont	
(Az *ADP* háromszögből szinusztétellel:) $\frac{c}{d}=\frac{\sin 100^\circ}{\sin 60^\circ}$, azaz $c=d\cdot\frac{\sin 100^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$, és	1 pont	
$\frac{b}{d}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$, azaz $b=d\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{\sin^2 20^\circ}{\sin 60^\circ\cdot\sin 100^\circ}$.	1 pont	
A *PQR* szabályos háromszög oldala ($a = CD - c - b$): $a=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 100^\circ}-\frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}-\frac{\sin^2 20^\circ}{\sin 60^\circ\cdot\sin 100^\circ}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}347$.	1 pont	
Összesen	**7 pont**	

Megjegyzések:
1. Az ábra jelöléseivel: $CD \approx 0{,}879$, $d \approx 0{,}347$, $c \approx 0{,}395$, $b \approx 0{,}137$.
2. Addíciós tételek felhasználásával bizonyítható, hogy $a = d = 2\cdot\sin 10^\circ$.

8. c) első megoldás		
A kiválasztott három színnel a páronként szomszédos *CQR*, *CAP* és *PQR* háromszögeket (3!) = 6-féleképpen színezhetjük.	1 pont	
ABQ és *CQR* háromszög színe megegyezik (mert az *ABQ* háromszög színe a *CAP* és a *PQR* háromszög színétől is különbözik).	1 pont	
BCQ háromszöget kétféle színnel is színezhetjük (úgy mint *CAP*-t, vagy úgy mint *PQR*-t),	1 pont	
tehát a kiválasztott három színnel ($6\cdot 2$ =) 12 színezés lehetséges.	1 pont	
Mivel a három színt a négy közül négyféleképpen választhatjuk ki, ezért ($4\cdot 6\cdot 2$ =) 48 különböző színezés van.	1 pont	
Összesen	**5 pont**	

8. c) második megoldás		
A *PQR* háromszöget négyféleképpen színezhetjük, és minden egyes színezéshez az *RQC* háromszög színét háromféleképpen választhatjuk. Ez $(4 \cdot 3 =)$ 12 lehetőség.	1 pont	
Ezután a *CAP* háromszög színe kétféle lehet, tehát eddig 24 különböző színezést adhattunk meg.	1 pont	
Csak három színt használhatunk a színezéshez, ezért az *ABQ* háromszög színe csak a már kiszínezett *RQC* háromszög színével egyező lehet (vagyis nem változik a lehetséges színezések száma).	1 pont	
A *BQC* háromszög színe ismét kétféle lehet (vagy a *PQR* vagy az *APC* háromszög színével megegyező).	1 pont	
Összesen tehát $(24 \cdot 2 =)$ 48 különböző színezés van.	1 pont	
Összesen	**5 pont**	

9. a)		
Az első árcsökkentés után az új ár az eredeti árnak az $\left(1-\frac{p}{100}\right)$-szorosa,	1 pont	
a második árcsökkentés után az eredeti árnak az $\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p+4,5}{100}\right)$-szorosa lett.	1 pont	
Ez az eredeti ár 81,4%-a, tehát $\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p+4,5}{100}\right)=0,814$.	1 pont	*A* $q=1-\frac{p}{100}$ *jelölést használva az egyenlet:* $q(q-0,045)=0,814$.
$p^2-195,5p+1410=0$	2 pont	$q^2-0,045q-0,814=0$
$p = 7,5$ vagy $p = 188$, de ez utóbbi ($p > 100$ miatt) nem felel meg a feladat szövegének.	1 pont	$q = 0,925$ *(vagy* $q = -0,88$, *de) a negatív gyök nem felel meg a feladat szövegének.*
Az első árcsökkentés 7,5%-os, a második 12%-os volt.	1 pont	
Ellenőrzés: A két árcsökkentés után az új ár az eredetinek $0,925 \cdot 0,88$-szorosa lett. $0,925 \cdot 0,88 = 0,814$, tehát az új ár valóban 18,6%-kal alacsonyabb az eredeti árnál.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó próbálgatással megtalálja, hogy p = 7,5 megoldás, ezt igazolja, majd ez alapján helyes választ ad, de nem mutatja meg, hogy más megoldása nem lehet a feladatnak, akkor ezért 3 pontot kapjon.

9. b)		
Annak a valószínűsége, hogy pontosan egy húzás szükséges: $P(1) = 0$.	1 pont	
Legfeljebb 4 húzás szükséges ahhoz, hogy legyen két azonos színű kesztyű a kihúzottak között,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért a pontosan 5, illetve pontosan 6 szükséges húzás valószínűsége: $P(5) = P(6) = 0$.	1 pont	
A pontosan 2 húzás szükségességének valószínűsége: $P(2) = \frac{1}{5}$ (a másodiknak kihúzott kesztyű színe megegyezik az elsőével).	1 pont	
Pontosan 3 húzás akkor szükséges, ha a második kihúzott kesztyű színe nem egyezik meg az elsőnek kihúzottéval, de a harmadikra húzott kesztyű színe megegyezik az első kettő közül valamelyiknek a színével: $P(3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$.	1 pont	
Pontosan 4 húzás akkor szükséges, ha az első három szín mind különböző (ekkor a negyediknek kihúzott kesztyű színe már biztosan megegyezik valamelyik korábban kihúzott kesztyű színével): $P(4) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot 1 = \frac{2}{5}$.	1 pont	$P(4) = 1 - (P(2) + P(3)) =$ $= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.
A szükséges húzások számának várható értéke tehát: $(0 \cdot 1 +) \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{2}{5} \cdot 4 (+ 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6) =$	1 pont	
$= 3{,}2$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	