Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítási módszerek III.

Teljes indukció lényege:

- A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re.
- Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz.
- Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

Gyakorló feladatok

1. **Bizonyítsd be, hogy az első n pozitív természetes szám összege: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$!**

2. **Bizonyítsd be, hogy az első n pozitív természetes szám négyzetének összege felírható a következőképpen: $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$!**

3. **Bizonyítsd be, hogy az első n pozitív természetes szám köbének összege: $\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$!**

4. **Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egész esetén teljesül a következő összefüggés!**

$$1+3+\dots+(2n-1)=n^2$$

5. **Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egész esetén teljesül a következő összefüggés!**

$$2+5+8+\dots+(3n-1)=\frac{3n^2+n}{2}$$

6. **Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egész esetén teljesül a következő összefüggés!**

$$1^3+3^3+\dots+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1)$$

7. **Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!**

$$n+(n+1)+\dots+(3n-3)+(3n-2)=(2n-1)^2$$

8. **Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egész esetén teljesül a következő összefüggés!**

$$1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$$

9. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n \cdot (3n + 1) = n \cdot (n + 1)^2$$

10. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \in \mathbb{Z}^+$ - re teljesül a következő összefüggés!

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3}$$

11. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)}{4}$$

12. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot 2n} = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

13. Bizonyítsd be, hogy minden $n \geq 2$ egész esetén teljesül a következő összefüggés!

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n + 1}{2n}$$

14. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

15. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$$

16. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 2)} = \frac{3n^2 + 5n}{4 \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}$$

17. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{3}{n \cdot (n+3)} = \frac{11}{6} - \frac{3n^2 + 12n + 11}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}$$

18. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot (2n+1)}$$

19. Írd fel zárt alakban a következő kifejezést, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$! Bizonyítsd be a sejtésedet!

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$$

20. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}\right]$$

21. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$2 \mid n^2 - n$$

22. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$6 \mid 3n^2 + 3n$$

23. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$6 \mid n^3 - n$$

24. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$3 \mid n^3 + 2n$$

25. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$6 \mid n^3 + 11n$$

26. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$6 \mid n^3 + 5n$$

27. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$5 \mid n^5 - n$$

28. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$30 \mid n^5 - n$$

29. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$6 \mid 14n^3 + 9n^2 + n$$

30. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$4 \mid n^4 - 2n^3 + n^2$$

31. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$24 \mid n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$$

32. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$$

33. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$3 \mid 2^{2n} + 2$$

34. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$3 \mid 2 \cdot 7^{n} + 1$$

35. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$10 \mid 11^{n} - 1$$

36. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$4 \mid 7^{n} + 3^{n+1}$$

37. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$5 \mid 2^{4n+1} + 3$$

38. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$8 \mid 3^{2n} + 7$$

39. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$9 \mid 4^{n} + 15n - 1$$

40. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$18 \mid 2^{2n} + 24n - 10$$

41. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$9 \mid 7^n + 3n - 1$$

42. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$27 \mid 10^n + 18n - 1$$

43. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$16 \mid 3^{2n+2} + 8n - 9$$

44. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$$

45. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$81 \mid 10^n \cdot (9n - 1) + 1$$

46. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$4 \mid 3 \cdot 17^{2n} + 25^n$$

47. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$5 \mid 4 \cdot 6^n + 5^n - 4$$

48. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$13 \mid 3^{n+2} + 4^{2n+1}$$

49. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$\mathbf{11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}}$$

50. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\mathbf{133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}}$$

51. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\mathbf{21 \mid 5^{2n+1} + 4^{n+2}}$$

52. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$\mathbf{7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}}$$

53. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$\mathbf{57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}}$$

54. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\mathbf{17 \mid 7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}}$$

55. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\mathbf{19 \mid 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}}$$

56. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$\mathbf{8 \mid 5^{n} + 2 \cdot 3^{n-1} + 1}$$

57. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$99 \mid 3^{n+3} \cdot 2^{2n+2} - 108$$

58. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$17 \mid 2^{5n+3} + 5^{n} \cdot 3^{n+2}$$

59. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$23 \mid 2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$$

60. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$11 \mid 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n}$$

61. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$19 \mid 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}$$

62. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő összefüggés!

$$57 \mid 7^{n+2} + 7^{n+1} + 7^{n}$$

63. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$72 \mid n \cdot 13^{n+1} - (n+1) \cdot 13^{n} + 1$$

64. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

65. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül a következő összefüggés!

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

66. Bizonyítsd be, hogy $(2+1) \cdot (2^2+1) \cdot \ldots \cdot \left(2^{2^n}+1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$!

67. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \geq 5$ egész esetén: $2^n > n^2$!

68. Bizonyítsd be, hogy minden n pozitív egész esetén: $2^n \geq 2n$!

69. Bizonyítsd be, hogy bármely $n > 2$ egész esetén: $2^n > 2n + 1$!

70. Bizonyítsd be, hogy bármely $n > 3$ egész esetén: $3^n > n^3$!

71. Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív egész esetén: $(n+1)! \geq 2^{n-1}$!

72. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \geq 7$ egész esetén: $n! > 3^n$!

73. Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív egész esetén: $n! \geq 2^{n-1}$!

74. Bizonyítsd be a Bernoulli – egyenlőtlenséget: bármely $a \geq -1$ és n természetes számra $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$!

75. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \geq 2$ pozitív egész esetén: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$!

76. Bizonyítsd be, hogy bármely $n > 1$ – re teljesül: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}}$!

77. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \geq 2$ pozitív egész esetén: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$!

78. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egész esetén: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$!

79. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \geq 2$ pozitív egész esetén: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$!

80. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \geq 2$ egész esetén: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2 \cdot \sqrt{n} - 1$!

81. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egész esetén: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) > \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}}$!

82. Bizonyítsd be, hogy bármely n pozitív egészre: $3 + \dots + \underbrace{33 \ldots 33}_{n\,db} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$!

83. Bizonyítsd be, hogy ha $a + \frac{1}{a}$ egész, akkor $a^n + \frac{1}{a^n}$ is egész, ahol n pozitív egész!

84. Bizonyítsd be, hogy ha $a + b = 2$ és $a^2 + b^2 = 4$, akkor $a^n + b^n = 2^n$, ha $n \in \mathbb{Z}^+$!

85. Bizonyítsd be, hogy ha x_1 és x_2 az egész együtthatós $x^2 + ax + b = 0$ másodfokú egynelet megoldásai, akkor bármely n pozitív egész esetén ${x_1}^n + {x_2}^n$ egész szám!

86. Bizonyítsd be, hogy n darab egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja!

87. Bizonyítsd be, hogy n kör a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja!

88. Bizonyítsd be, hogy egy adott ponton átmenő n darab egyenes a síkot $2n$ részre osztja!

89. Bizonyítsd be, hogy bárhogy is rajzolunk a síkon n darab egyenest (illetve kört), a kapott „térkép" mindig kiszínezhető két színnel úgy, hogy az oldalszomszédos részek ne legyenek azonos színűek!

90. Adott n darab pont a síkon. A közöttük meghúzható szakaszok közül n darabot megrajzolunk $(n \geq 3)$. Bizonyítsd be, hogy létrejön olyan zárt sokszögvonal, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók!

91. Adott n darab egyenes úgy, hogy bármely kettőnek van közös pontja. Bizonyítsd be, hogy akkor az egyenesek vagy mind egy síkban vannak, vagy mind egy ponton haladnak át!

92. Bizonyítsd be, hogy minden $n \geq 4$ pozitív egész számra létezik olyan konvex n – szög, amelynek pontosan 3 hegyesszöge van!

93. Bizonyítsd be, hogy minden négyzet feldarabolható n darab négyzetre $(n > 5)$!

94. Bizonyítsd be, hogy minden háromszög feldarabolható n darab hozzá hasonló háromszögre $(n > 5)$!

Mutasd meg, hogy minden szabályos háromszög feldarabolható n darab szabályos háromszögre, ha $n \geq 6$!

95. Adott a következő egységű tömegek: $1; 2; 2^2; \ldots; 2^n$. Bizonyítsd be, hogy ezekkel tetszőleges $2^{n+1} - 1$ – nél nem nagyobb egész tömegű testet meg tudunk mérni!

96. 3^n számú, külsőleg egyforma golyó közül egy kivételével mindegyiknek egyenlő a tömege is. A „hibás" golyó könnyebb, mint a többi. Bizonyítsd be, hogy kétkarú mérleggel n lépésben kiválasztható a „hibás" golyó!

97. A benaresi templom kupolája alatt márványasztalra erősítve három gyémánttű csillog. Hajdanában, a templom építésekor az első tűn 64 középen átfúrt aranykorong helyezkedett el, legalul a legnagyobb, rajta egy kisebb, azon egy még kisebb és így tovább, egyre csökkenő átmérővel. Az isteni parancs így szólt: „Mind a 64 korongot át kell helyezni a második gyémánttűre. Áthelyezés közben a harmadik gyémánttűt is szabad használni. A következő utasításokhoz kell tartsák magukat mindazok, akik az áthelyezéssel megpróbálkoznak:

- **Egy tűről csak a legfelső korongot szabad levenni.**
- **Korongot átteni vagy csak üres tűre szabad, vagy olyanra, melyen a legfelső korong átmérője nagyobb, mint az átteendő korongé.**
- **Minden másodpercben egy áthelyezés történjék.**

Amikor az utolsó korongot is áthelyezik, akkor érkezik el a világvége. A feladat végrehajtásához mennyi áthelyezésre van szükség, s hány év múlva jön el a világvége?

98. Bizonyítsd be a következő egyenlőséget! $(\sin x \neq 0; n \in \mathbb{N})$

$$\cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot \dots \cdot \cos(2^n \cdot x) = \frac{\sin(2^{n+1} \cdot x)}{2^{n+1} \cdot \sin x}$$

99. Adott az $a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{3}; a_{n+2} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}$ **rekurzív soorzat, ahol** n **egy pozitív egész. Bizonyítsd be, hogy a sorozat általános alakja** $a_n = \frac{1}{2^{n-1}+1}$**!**

100. Adott az $a_1 = 2; a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2$ **rekurzív sorozat, ahol** n **egy pozitív egész. Írd fel a sorozat általános tagját és bizonyítsd be sejtésedet!**

101. Egy sorozatra: $a_1 = 1$ **és** $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1$**. Bizonyítsd be, hogy** $a_n = 2^n - 1$**!**

102. Az $\{a_n\}$ **sorozatot a következő rekurzió definiálja:** $a_1 = 1$ **és** $a_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot a_{n-1}$**, ahol** $n \in \mathbb{Z}^+$**. Ig Igazold a következőt:** $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$**!**

103. Egy sorozat első három tagja 3. A sorozat további tagjait az alábbi összefüggéssel kapjuk meg: $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3}; n \geq 4$. Bizonyítsd be, hogy a sorozat minden tagja hárommal osztható!

104. Egy számsorozat első tagja $a_1 = \sqrt{5}$ és $a_{n+1} = \sqrt{5 \cdot a_n}$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Határozd meg a sorozat n – edik tagjának általános alakját!

105. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely n természetes számra igaz, hogy $a^n = 1$, ahol a tetszőleges pozitív valós szám.

Bizonyítás teljes indukcióval:

(a) Ha $n = 0$, akkor $a^0 = 1$, igaz az állítás.

(b) Tegyük fel, hogy a tétel igaz bármely $n \leq k$ – ra is: $a^k = 1$.

(c) Ekkor állítjuk, hogy $n = k + 1$ – re is igaz, mivel az indukciós feltétel szerint: $a^{k+1} = a^{2k-(k-1)} = \frac{a^k \cdot a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$.

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(5) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(9) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(11) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(12) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(13) Saját anyagok