Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

A póker matematikája

Mostanában egyre közkedveltebb kártyajáték lett a **(Holdem) Poker**, melynek az is oka lehet, hogy a televízióban megjelent a nagyobb versenyek közvetítése. Mint minden kártyajátékban, itt is lényeges a szerencse faktor, illetve az is, hogy minek mennyi lehet a valószínűsége. A következőekben a lehetséges kimenetelek esélyeit szeretném bemutatni, részletes (és remélhetőleg könnyen követhető) számítással alátámasztani.

Először a szabályokról ejtenék néhány szót. A játékot 52 lapos francia kártyával játszák, mely 4 színből **(Treff, Pikk, Kör, Káró)**, s minden szín 13 figurából ($\mathbf{2,3,4,5,6,7,8,9,10,}\boldsymbol{J,Q,K,A}$) áll. Az Ász a játék során egyesként is szerepelhet! Egy adott körben minden játékos kézhez kap 2 lapot (melyet csak ő lát), majd ezután mindenkinek lehetősége van „megszólalni" (dobni a lapot/ tartani a tétet / emelni a tétet). Miután a megadások megtörténtek, az osztó lehelyez egy lapot az asztalra („éget" : a lapot nem látják a játékosok) lefordítva, majd pedig három lapot felfordítva **(FLOP)**. Ezután ismét egy licitkör (megszólalás) következik. A megadások után szintén éget az osztó, majd egy lapot helyez a korábbi három mellé **(TURN)**. Ezt követően ismét licitek következnek. Miután a hívásokat megadták, újfent éget az osztó, végezetül lehelyezi az utolsó közös lapot is az asztalra a korábbi négy mellé **(RIVER)**. Ezt követően még van egy lehetőség a játékosoknak a hívásra, majd pedig megmutatják lapjaikat és a legjobb „kézzel" rendelkező versenyző viszi a kasszát (döntetlen esetén osztoznak). A játékosnak a 2 saját és az 5 közös lapból kell a legmagasabb kombinációt **($\mathbf{5}$ lapot)** kiválasztania a mutatáshoz. Amennyiben két játékosnál azonos a kombináció, úgy a magasabb lappal rendelkező versenyző nyeri a kört. Full House esetében az nyer, akinek a három egyforma lapja magasabb.

A következő, amit át kell tekintenünk, az a lehetséges lap kombinációk a játék során. Ezek sorrendben: **1. Royal Flush** (egy színből a legmagasabb sor, pl.: körből $10, J, Q, K, A$); **2. Straight Flush** (egy színből nem a legmagasabb sor, pl.: káróból $3, 4, 5, 6, 7$); **3. Poker** (négy egyforma figura, pl.: káró 9, kör 9, pikk 9, treff 9); **4. Full House** (három egyforma és két egyforma, pl.: kör 8, treff 8, káró 8, pikk 3, treff 3); **5. Flush** (öt lap egy színből, pl.: treffből $2, 4, 7, J, K$); **6. Straight** (különböző színű lapokból sor, pl.: treff A, kör 2, kör 3, pikk 4, káró 5); **7. Drill** (három egyforma figura, pl.: kör 4, treff 4, pikk 4); **8. Két pár** (két - két egyforma lap, pl.: kör 10, treff 10, kör K, káró K); **9. Egy pár** (két egyforma figura, pl.: kör 6, káró 6); **10. Magas lap** (öt olyan lap, melyekből a fentiek egyike sem rakható ki, pl.: káró 3, káró 5, treff 6, pikk 10, pikk Q).

Még mielőtt belekezdenénk a számolgatásokba, talán célszerű röviden összefoglalni, miket is fogunk alkalmazni a valószínűségek kiszámításához. Az első amit meg kell említeni, hogy a **valószínűséget** a következő képlettel adjuk meg: $\frac{\boldsymbol{kedvező\ eset}}{\boldsymbol{összes\ eset}}$**.** Tehát minden esetben két értéket kell majd számolnunk, s ezeket a következő kombinatorikai eszközökkel határozhatjuk meg:

- **Ismétlés nélküli permutáció:** n darab különböző elem sorbarendezése
  (az összes lehetséges sorrend száma: $\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$**)**

- **Ismétlés nélküli kombináció:** n darab, különböző elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy a kiválasztás során nincs ismétlődő elem és nem fontos az elemek sorrendje
  (az összes lehetséges kiválasztás száma: $\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$)

- **Ismétlés nélküli variáció:** n darab, különböző elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy a kiválasztás során nincs ismétlődő elem és számít az elemek sorrendje
  (az összes lehetséges kiválasztás száma: $\boldsymbol{\frac{n!}{(n-k)!}}$)

- **Ismétléses variáció:** n darab, különböző elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy a kiválasztás során lehet ismétlődő elem és számít az elemek sorrendje is
  (az összes lehetséges kiválasztás száma: $\boldsymbol{n^k}$)

Mindezen bevezető után hozzá is kezdhetünk kiszámítani az egyes lapkombinációk előfordulásának esélyeit. Amennyiben átgondoljuk a feladatot, láthatjuk, hogy a valószínűség kiszámításához fentebb megadott képletben szereplő **összes eset** mindenhol azonos lesz, még pedig a következő kérdésre adott válasz: Hány féleképpen vehetek ki 5 lapot az 52 lapos pakliból, ha nem teszek vissza egyet sem a húzás során? (A látott 7 lapból elegendő a végén használt 5 lapot tekinteni.) Ehhez a kombináció képletét kell alkalmaznunk, vagyis az összes eset: $\boldsymbol{\binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2\,598\,960}$.

Tekintsük ezt követően a kedvező esetek számát, s az egyes esetekben adódó esélyeket:

- **Royal Flush:** Minden szín esetén csak egy ilyen lapkombináció lehetséges, tehát a kedvező esetek száma 4.

  Így a Royal Flush esélye: $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,000001539}$.

- **Straight Flush (színsor):** Egy szín 14 lapjából (az Ász lehet 1 – es is!) összesen 10 különböző 5 lapból álló sort tudunk képezni, tehát a kedvező esetek száma 40.

  Így a Straight Flush esélye: $\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,00001385}$.

- **Poker:** Először a 13 figurából kiválasztjuk azt a lapot amiből mind a 4 elő fog fordulni, ezt 13 – féleképpen tehetjük meg. Ezután a pakliban maradó 48 lapból kiválasztjuk az ötödik lapot, amit 48 – féleképpen tehetünk meg. Mivel ezek az események (kiválasztások) egymástól függnek, ezért a kedvező esetek száma: $13 \cdot 48 = 624$.

  Így a Poker esélye: $\frac{\mathbf{624}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,00024}$.

- **Full House:** Először a 13 figurából kiválasztjuk azt a lapot, amiből 3 szín fog előfordulni, ezt 13 – féleképpen tehetjük meg. Ezután kiválasztjuk a 3 színt, amit 4 – féleképpen tehetünk meg. Ezt követően a maradék 12 figurából kiválasztjuk azt a lapot, amiből 2 szín fog előfordulni, ezt 12 – féleképpen tehetjük meg. Végül kiválasztjuk a 2 színt, amit $\binom{4}{2} = 6$ – féleképpen tehetünk meg. Mivel ezek az események (kiválasztások) egymástól függnek, ezért a kedvező esetek száma: $13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$.

  Így a Full House esélye: $\frac{\mathbf{3744}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,00144}$.

- **Flush (szín):** Először a 4 színből kiválasztunk egyet, ezt 4 – féleképpen tehetjük meg. Ezután az adott szín 13 lapjából ki kell választanunk az 5 – öt (sorrend természetesen itt sem számít), amit $\binom{13}{5} = 1287$ – féleképpen tehetünk meg. Mivel ezek az események (kiválasztások) egymástól függnek, ezért a következőt kapjuk: $4 \cdot 1\,287 = 5148$. Végül ezekből ki kell vonnunk a korábban kiszámolt Royal - és Straight Flush - ök számát, vagyis a kedvező esetek száma: 5108.

  Így a Flush esélye: $\frac{\mathbf{5108}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,0019654.}$

- **Straight (sor):** Először a lehetséges 10 sorból (az Ász 1 – es is lehet!) kiválasztunk egyet, ezt 10 – féleképpen tehetjük meg. Ezután kiválasztunk a 4 színből 5 – öt (a sorrend számít és egy szín ismétlődhet is), amit $4^5 = 1024$ – féleképpen tehetünk meg. Mivel ezek az események (kiválasztások) egymástól függnek, ezért a következőt kapjuk: $10 \cdot 1024 = 10240$. Végül ezekből ki kell vonnunk a korábban kiszámolt Royal - és Straight Flush - ök számát, vagyis a kedvező esetek száma: 10200.

  Így a Straight esélye: $\frac{\mathbf{10\,200}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,0039246}$.

- **Drill:** Először a 13 figurából kiválasztjuk azt a lapot, amiből 3 szín fog előfordulni, ezt 13 – féleképpen tehetjük meg. Ezután kiválasztjuk a 3 színt, amit 4 – féleképpen tehetünk meg. Ezt követően a maradék 12 figurából még ki kell választanunk további 2 – t, amit $\binom{12}{2} = 66$ – féleképpen tehetünk meg. Végül kiválasztjuk ezeknek a színét is (a sorrend számít és egy szín ismétlődhet is), amit $4^2 = 16$ – féleképpen tehetünk meg. Mivel ezek az események egymástól függnek, ezért a kedvező esetek száma: $13 \cdot 4 \cdot 66 \cdot 16 = 54912$.

  Így a Full House esélye: $\frac{\mathbf{54\,912}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,0211}$.

- **Két Pár:** Először a 13 figurából kiválasztjuk azt a 2 – t, melyek párban lesznek, ezt $\binom{13}{2} = 78$ – féleképpen tehetjük meg. Ezután kiválasztjuk a pároknak megfelelő két – két színt, amit $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36$ – féleképpen tehetünk meg. Ezt követően az ötödik lapot kiválasztjuk a maradék 11 figurából, amit 11 – féleképpen tehetünk meg. Végül kiválasztjuk ennek a színét is, amit 4 – féleképpen tehetünk meg. Mivel ezek az események egymástól függnek, ezért a kedvező esetek száma: $78 \cdot 36 \cdot 11 \cdot 4 = 123\,552$.

  Így a Két Pár esélye: $\frac{\mathbf{123\,552}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,0475}$.

- **Egy Pár:** Először a 13 figurából kiválasztjuk azt amelyek párban lesznek, ezt 13 – féleképpen tehetjük meg. Ezután kiválasztjuk a pároknak megfelelő két színt, amit $\binom{4}{2} = 6$ – féleképpen tehetünk meg. Ezt követően a többi lapot kiválasztjuk a maradék 12 figurából, amit $\binom{12}{3} = 220$ – féleképpen tehetünk meg. Végül kiválasztjuk ezeknek a színét is (a sorrend számít és egy szín ismétlődhet is), amit $4^3 = 64$ – féleképpen tehetünk meg. Mivel ezek az események (kiválasztások) egymástól függnek, ezért a kedvező esetek száma: $13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 64 = 1\,098\,240$.

  Így az Egy Pár esélye: $\frac{\mathbf{1\,098\,240}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,42.}$

- **Magas Lap:** Először a 13 figurából kiválasztunk 5 – öt, ezt $\binom{13}{5} = 1287$ – féleképpen tehetjük meg. Ezután kiválasztjuk ezeknek a színét is (a sorrend számít és egy szín ismétlődhet is), amit $4^5 = 1024$ – féleképpen tehetünk meg. Mivel ezek az események (kiválasztások) egymástól függnek, ezért a következőt kapjuk: $1287 \cdot 1024 = 1\,317\,888$. Végül ezekből ki kell vonnunk a korábban kiszámolt Royal Flush - ök, Straight Flush - ök, Flush - ök és Straight – ek számát, vagyis a kedvező esetek száma: $1\,302\,540$.
  Így a Magas Lap esélye: $\frac{\mathbf{1\,302\,540}}{\mathbf{2\,598\,960}} = \mathbf{0,501}$.

Miután mindent kiszámoltunk, látható a számokból, hogy miért pont így jönnek sorrendben a lapkombinációk értékei, még ha azt első ránézésre néha kicsit másképp is gondolnánk. Egyesek azt szokták mondani, hogy annak az esélye, hogy Royal Flush - t kapjunk egy élet is kevés. Pedig, ha összevetjük mondjuk azzal, hogy mennyi az **Ötös Lottón** az esélyünk, ahhoz hogy elvigyük a főnyereményt $\left(\frac{\mathbf{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{43\,949\,268}} = \mathbf{0,00000002275}\right)$, látható melyikre is kellene többet várnunk.

Outok kiszámítása

Outoknak azokat a kártyákat nevezzük, amelyekkel véleményünk szerint nyerő lapunk lesz. Az outokkal való számítás egyfajta becslés. Az esélyünk kiszámításához az „out” és „nem out” lapok egymáshoz viszonyított arányát kell meghatároznunk. A „nem out” lapok számát úgy kaphatjuk meg, hogy az összes ismeretlen lapok számából kivonjuk a gondolt outjaink számát. Amennyiben TURN - ön járunk, azaz csak egy „utca” van hátra, akkor egyszerű dolgunk van: az 52 lapos pakliból 6 lapot ismerünk (4 asztalon, 2 kézben), 46 - ot nem. Ekkor a **nyerési odds:** $\frac{\boldsymbol{outok\ száma}}{\boldsymbol{46 - outok\ száma}}$. Tekintsünk egy konkrét példát: színhúzóval (1 lap kell ahhoz, hogy Flush - ünk legyen) az outjaink száma 9, mert 13 színkártyából 2 a kezünkben van, 2 pedig az asztalon. TURN - ön a nyerési oddsunk így $\frac{9}{37} = 1:4{,}1$ lesz. Míg ez egy arányszám, addig ugyanez százalékosan számítva: $\frac{9}{37} \approx 24{,}32\ \%$.

Amennyiben nem a TURN - nél, hanem még a FLOP - on járunk, akkor bonyolultabb a helyzet. A fenti eljárással (az ismeretlen kártyák száma 47 - re módosul), csak azt az esélyt tudjuk megbecsülni, amivel TURN - re javulunk. A TURN - RIVER együttes becslése nehezebb. Annak az esélye, hogy a két utca egyikén megjön valamelyik outunk, a következővel lesz egyenlő: a $100\ \%$ - ból ki kell vonni annak az esélyét, amikor egyik utcán sem javulunk. Képlettel leírva: $1 - \frac{\boldsymbol{47 - outok\ száma}}{\boldsymbol{47}} \cdot \frac{\boldsymbol{46 - outok\ száma}}{\boldsymbol{46}}$. Előző példát tekintve: $1 - \frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46} \approx 34{,}97$, vagyis kb. $35\ \%$ lesz az esélye annak, hogy egy floppolt kilenc élő outos színhúzóval riverig valahol Flush - re javulunk.

Van egy könnyebb számolási mód is, mellyel közelítő értéket lehet meghatározni: A következő utcán való javulásnak az esélyét úgy számolhatjuk ki, hogy megszorozzuk az outok számát kettővel, és ez lesz a százalék! Azonban ha a TURN - RIVER együttes javulási esélyét tekintjük, akkor meg kell szorozni az outokat néggyel, majd az eredményből ki kell vonni a 8 fölötti outok számát! A fenti példát alapul véve: 9 outnál ez egy utcára $18\ \%$ - os javulást mutat, két utcára pedig $9 \cdot 4 - (9 - 8) = 35\ \%$ - ot. A második mutató 14 outra $50\ \%$, vagyis érdemes megjegyezni, hogy ekkor a 14 out jelenti az 50 - 50% - os esélyt!

Néhány kezdő lap érdekes megnevezése

- $\boldsymbol{A-A}$: American Airlines vagy Pocket Rockets
- $\boldsymbol{A-K}$: Big Slick vagy Anna Kournikova ("jól néz ki, de ritkán nyer")
- $\boldsymbol{A-Q}$: Big Chick (nagylány)
- $\boldsymbol{K-K}$: Cowboys vagy King Kong
- $\boldsymbol{K-Q}$: Marriage (házasság)
- $\boldsymbol{Q-Q}$: Ladies (dámák)
- $\boldsymbol{J-J}$: Hooks (horgok, kampók)
- $\mathbf{10-2}$: Doyle Brunson (legendás amerikai pókerjátékos, aki ezekkel a lapokkal kétszer nyerte meg a WSOP - t)
- $\mathbf{9-2}$: Montana Banana (Montana a legészakibb része az USA - nak, így ott képtelenség banánt termelni. Az esély a nyerésre ezekkel a lapokkal annyi, mint, hogy Montanában banán terem.)
- $\mathbf{8-8}$: Snowman (hóember) vagy Two Fat Ladies (két kövér hölgy)
- $\mathbf{7-7}$: Hockey Sticks (hokiütők)
- $\mathbf{6-9}$: The Big Lover (egy szeretkezési pózra utal)
- $\mathbf{4-5}$: Colt 45 vagy Jesse James (a híres banditát ezzel a fegyverrel ölték meg)
- $\mathbf{3-3}$: Crabs (rákok)
- $\mathbf{2-2}$: Ducks (kacsák)

Brósch Zoltán