Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Játék a szavakkal

A következőkben néhány szóképzéssel kapcsolatos feladatot szeretnék bemutatni, melyek során látni fogjuk, hogy egy ábrából hányféleképpen olvashatunk ki egy adott szót, vagy néhány betűből összesen mennyi „szót” lehet képezni a feltételeknek megfelelően.

A feladatok előtt azonban röviden tekintsük át a kombinatorika témakör azon képleteit, melyekre szükségünk lesz a megoldások során. Ezek a következők:

Ismétlés nélküli permutáció:

n különböző elemet rendezünk sorba az összes lehetséges módon.

Ezek száma: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (*„n faktoriális”*)

Ismétléses permutáció:

n olyan elemet rendezünk sorba az összes lehetséges módon, ahol ismétlődő elemek is előfordulnak, s ezen ismétlődések száma: k_1, k_2, …, k_l.

Ezek száma: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_{l!}}$

Ismétléses nélküli kombináció:

n különböző elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy egy elemet csak egyszer választhatunk ki és a kiválasztás során a sorrend nem számít.

Ezek száma: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ („*n alatt a k*”)

Ismétléses permutáció:

n különböző elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk és a kiválasztás során a sorrend nem számít.

Ezek száma: $\binom{n+k-1}{k}$

Ismétlés nélküli variáció:

n különböző elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy egy elemet csak egyszer választhatunk ki és a kiválasztás során sorrend számít.

Ezek száma: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Ismétléses variáció:

n különböző elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk és a kiválasztás során a sorrend számít.

Ezek száma: n^k

A fogalmak és képletek ismertetése után nézzük a szóképzéssel kapcsolatos feladatokat.

1. Feladat:

A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a TÖRTÉNELEM szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

T	**Ö**	**R**	**T**	**É**	**N**
Ö	**R**	**T**	**É**	**N**	**E**
R	**T**	**É**	**N**	**E**	**L**
T	**É**	**N**	**E**	**L**	**E**
É	**N**	**E**	**L**	**E**	**M**

Megoldás:

Először tekintsük azt a megoldást, amikor a betűk helyére olyan számokat írunk, melyek azt jelölik, hogy az adott betűhöz összesen hányféleképpen juthatunk el. Az ábra kitöltésénél azt kell észrevennünk, hogy a felső és szélső számok rendre 1 - esek lesznek, míg egy „belső" szám a felette levő szám és a tőle balra álló szám összegeként adódik, mert azokból léphetünk az adott mezőre. A helyes kitöltés tehát a következő:

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**
1	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**
1	**5**	**15**	**35**	**70**	**126**

Ezek alapján az M betűnél található szám a megoldás, vagyis a TÖRTÉNELEM szó összesen 126 - féleképpen olvasható ki az ábrából.

Egy másik megoldás lehet, ha észrevesszük, hogy a kezdőbetűtől az M betűig 9 lépésünk lesz minden kiolvasás során. Továbbá az is látható, hogy minden ilyen 9 lépéses sorozatban kell lenni 5 darab jobbra (jelöljük ezt J – vel) és 4 darab lefele (jelöljük ezt L – lel) lépésnek. Ezek alapján a kérdés az, hogy hányféleképpen tehetjük sorba az 5 darab J – t és 4 darab L – t. Ehhez az ismétléses permutáció képletét kell alkalmaznunk, vagyis a megoldás: $\frac{9!}{5!\cdot 4!} = 126$. Ezzel a módszerrel egyébként ellenőrizhetjük a táblázatba írt többi szám helyességét is.

2. Feladat:

A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a SOROZAT szót, ha minden lépésnél csak balra lefele vagy jobbra lefele haladhatunk?

			S			
		O		**O**		
	R		**R**		**R**	
O		**O**		**O**		**O**
	Z		**Z**		**Z**	
		A		**A**		
			T			

<u>Megoldás:</u>

Az előző feladathoz hasonlóan itt is azt kell megvizsgálni, hogy az utolsó T betűhöz hányféleképpen juthatunk el.

Ezúttal minden kiolvasáshoz összesen 6 lépésre lesz szükségünk, amelyekben mindenképp lesz 3 jobbra (J) és 3 balra (B) lépés lefele, így a megoldást ismét ismétléses permutációval számíthatjuk ki: $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

A táblázat helyes kitöltése után szintén ezt az értéket kapjuk:

			1			
		1		**1**		
	1		**2**		**1**	
1		**3**		**3**		**1**
	4		**6**		**4**	
		10		**10**		
			20			

3. Feladat:

A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a MATEMATIKA szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
A	T	E	M	A	T	I	K	A	
T	E	M	A	T	I	K	A		
E	M	A	T	I	K	A			
M	A	T	I	K	A				
A	T	I	K	A					
T	I	K	A						
I	K	A							
K	A								
A									

Megoldás:

Ez a feladat abban különbözik az előzőktől, hogy nem egy betűhöz kell eljutnunk a lépések során, hanem az átló mentén levő *A* betűk bármelyikére végződhet a szavunk.

A legfelső és legalsó *A* betűhöz egyaránt 1 – féleképpen juthatunk el. A második és kilencedik sorban levő *A* betűhöz $\frac{9!}{1! \cdot 8!} = 9$, a harmadik és nyolcadik sorban $\frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$, a negyedik és hetedik sorban $\frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$, míg a két középső sorban $\frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$ – féleképpen juthatunk el a kezdőbetűtől.

Ezek alapján összesen $2 \cdot (1 + 9 + 36 + 84 + 126) = 512$ – féleképpen olvashatjuk ki.

A táblázatot itt is kitölthetjük számokkal, s így ellenőrizhetjük számításunk helyességét.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

4. Feladat:

A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a SZÁMÍTÁSTECHNIKA szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

S	**Z**	**Á**	**M**	**Í**	**T**			
Z	**Á**	**M**	**Í**	**T**	**Á**			
Á	**M**	**Í**	**T**	**Á**	**S**			
					T	**E**	**C**	**H**
					E	**C**	**H**	**N**
					C	**H**	**N**	**I**
					H	**N**	**I**	**K**
					N	**I**	**K**	**A**

Megoldás:

Ennél a feladatnál célszerű előbb kiszámolnunk azt, hogy külön – külön a két téglalapból hányféleképpen tudjuk kiolvasni a SZÁMÍTÁS, illetve a TECHNIKA szavakat.

Az első szó kiolvasásához 7 lépésre van szükségünk, ahol lesz 2 lefele (L) és 5 jobbra (J), így ezt $\frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$ – féleképpen tehetjük meg. A második szó esetében szintén 7 lépésünk lesz, de ezúttal 4 lefele (L) és 3 jobbra (J), így ezt $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ – féleképpen tehetjük meg. Mivel a két kiolvasás függ egymástól, vagyis minden első téglalapbeli kiolvasáshoz tartozik egy második téglalapbeli kiolvasás, így a megoldás: $21 \cdot 35 = 735$.

A táblázat kitöltésénél a számok itt is adódnak a felettük és a balról előttük álló számok összegéből, így a második téglalap felső és szélső számai rendre megegyeznek az első téglalap jobb alsó sarkában lévő számával.

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**			
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**			
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**			
					21	**21**	**21**	**21**
					21	**42**	**63**	**84**
					21	**63**	**126**	**210**
					21	**84**	**210**	**420**
					21	**105**	**315**	**735**

5. Feladat:

Hányféleképpen lehet kiolvasni az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót, ha a „csillagozott” Z betűt mindenképp érinteni kell és minden lépésnél csak jobbra vagy lefelé lehet haladni?**

E	**Z**	**N**	**E**	**H**	**É**	**Z**	**K**	**I**	**O**	**L**	**V**
Z	**N**	**E**	**H**	**É**	**Z****	**K**	**I**	**O**	**L**	**V**	**A**
N	**E**	**H**	**É**	**Z**	**K**	**I**	**O**	**L**	**V**	**A**	**S**
E	**H**	**É**	**Z**	**K**	**I**	**O**	**L**		**A**	**S**	**Á**
H	**É**	**Z**	**K**	**I**	**O**	**L**	**V**	**A**	**S**	**Á**	**S**

<u>Megoldás:</u>

Mivel a Z^{**} - on mindenképp át kell haladnunk, így több olyan betű is van, amit nem tudunk felhasználni, ezért először ezeket töröljük az ábrából.

E	**Z**	**N**	**E**	**H**	**É**						
Z	**N**	**E**	**H**	**É**	**Z****	**K**	**I**	**O**	**L**	**V**	**A**
					K	**I**	**O**	**L**	**V**	**A**	**S**
					I	**O**	**L**		**A**	**S**	**Á**
					O	**L**	**V**	**A**	**S**	**Á**	**S**

Ezt követően nézzük meg azt, hogy összesen mennyi kiolvasás lehetne, ha nem szerepelne sötétített mező az ábrában. A Z^{**} betűhöz $\frac{6!}{1!\cdot 5!}=6$ – féleképpen juthatunk el, majd innen az utolsó S betűhöz pedig $\frac{9!}{3!\cdot 6!}=84$ – féleképpen. Ezek alapján összesen $6\cdot 84=504$ – féle kiolvasás lehetne, ha csak a Z^{**} - on való áthaladást tekintenénk feltételként.

Ezekből azonban ki kell vennünk azoknak a számát, amikor áthaladunk a fekete mezőn is. Ehhez ismét töröljük azokat a mezőket, amiket nem használhatunk fel ezen kiolvasásoknál.

E	**Z**	**N**	**E**	**H**	**É**						
Z	**N**	**E**	**H**	**É**	**Z****	**K**	**I**	**O**			
					K	**I**	**O**	**L**			
					I	**O**	**L**		**A**	**S**	**Á**
								A	**S**	**Á**	**S**

A Z^{**} - hoz itt is 6 – féleképpen tudunk eljutni, majd innen a fekete mezőhöz $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ – féleképpen, s onnan az utolsó S betűig pedig $\frac{4!}{1!\cdot 3!} = 4$ – féleképpen.

Ezek alapján $6 \cdot 10 \cdot 4 = 240$ olyan kiolvasás lehetséges, amely során áthaladunk a Z^{**} és a sötétített mezőn is. Ezeket kivéve az összes Z^{**} - on áthaladó kiolvasások számából kapjuk, hogy a feladat megoldása: $504 - 240 = 264$.

Az eredményt itt is ellenőrizhetjük a táblázat számokkal való helyes kitöltésével.

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**
					6	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**
					6	**18**	**36**		**30**	**66**	**108**
					6	**24**	**60**	**60**	**90**	**156**	**264**

6. Feladat:

Hányféleképpen olvasható ki a DEBRECEN szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet csak haladni?

							D							
						E	**E**	**E**						
					B	**B**	**B**	**B**	**B**					
				R	**R**		**R**	**R**	**R**	**R**				
			E	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**			
		C	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**		
	E	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**		**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	
N	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**

<u>Megoldás:</u>

Hasonlóan az előző feladathoz, először azt számoljuk ki, hogy amennyiben nem lenne sötétített mező az ábrán, úgy összesesen mennyiféleképpen lehetne kiolvasni a szavunkat.

Mivel pontosan 7 lépésünk van és minden mezőn 3 lehetőségből választhatunk a továbbhaladásra, így összesen $3^7 = 2187$ kiolvasás adódik.

Ezt követően ezekből vegyük ki azoknak a számát, amikor áthaladtunk a fekete mezőkön.

Első esetben tekintsük a felső sötétített mezőn vezető kiolvasások számát. Mivel ez a mező a szimmetriatengelytől 1 oszloppal balra helyezkedik el, így a balra (B) lépések száma eggyel több lesz a jobbra (J) lépések számánál. Továbbá a négyzetig összesen 3 lépésünk van, ezért két eset adódik: 1 darab B és 2 darab F (függőleges); illetve 1 darab J, 2 darab B. Mindkét esetben $\frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$ – féleképpen tehetjük sorba a betűket, így $2 \cdot 3 = 6$ úton át juthatunk el az első sötétített mezőig. Innen 4 lépés van hátra az utolsó betűig és mindegyiknél 3 választási lehetőségünk adódik a továbblépésre. Ezek alapján összesen $6 \cdot 3^4 = 486$ olyan kiolvasás lehetséges, amikor az első fekete mezőt érintjük.

Második esetben tekintsük azokat a kiolvasásokat, amikor az alsó sötétített mezőn áthaladunk. Mivel a fekete mező a szimmetriatengelyen helyezkedik el, ezért a balra (B) és jobbra (J) lépéseknek a száma megegyezik. Összesen 6 lépésünk van, így a következő esetek lehetségesek: $6\,F$, melyek 1 – féleképpen; $1\,B, 1\,J, 4\,F$, melyek $\frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 4!} = 30$ – féleképpen; $2\,B, 2\,J, 2\,F$, melyek $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 90$ – féleképpen;$3\,B, 3\,J$, melyek $\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ – féleképpen rakhatóak sorba. Ezek alapján $1 + 30 + 90 + 20 = 141$ – féleképpen juthatunk el a második sötétített mezőig. Mivel innen már csak 1 lépést kell tenni az utolsó betűig, de arra 3 választási lehetőségünk van, ezért összesen $141 \cdot 3 = 423$ olyan kiolvasás lehetséges, amikor az alsó fekete mezőn áthaladunk.

Végül vegyük észre, hogy a fenti két esetnél lehetnek átfedések, vagyis azon lehetőségeket kétszer számoltuk, amikor mindkét sötétített mezőn áthaladtunk. Ebből következik, hogy amennyiben a fenti eredményeket kivesszük az összesből, úgy a közöst kétszer vesszük ki, vagyis utólag egyszer még hozzá kell adnunk az ilyen kiolvasások számát. Számoljuk ki tehát azt is, hogy mennyi olyan kiolvasás lehetséges, amikor mindkettőn áthaladunk.

A felső sötétített mezőhöz láttuk, hogy 6 - féleképpen juthatunk el a kezdőbetűtől. Innen az alsó fekete mezőhöz 3 lépésre van szükségünk és csak olyan utak jöhetnek szóba, ahol a jobbra lépések száma egyel több a balra lépésekénél. Ezek alapján csak az$1\,J, 2\,F;$ illetve $2\,J, 1\,B$ esetek lehetségesek, melyeket egyaránt $\frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$ – féleképpen tehetünk sorba, vagyis $2 \cdot 3 = 6$ út vezet a második fekete mezőig. Innen már csak egy lépésünk van az utolsó betűig, de ezt 3 lehetőségből választhatjuk ki. Ezek alapján összesen $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ olyan kiolvasás van, amikor mindkét sötétített mezőn áthaladunk.

A fentiekből tehát a következő megoldás adódik: $2187 - 486 - 423 + 108 = 1386$.

Az ábrát számokkal kitöltve, itt a megoldás az utolsó sorban található számok összege lesz.

							1							
						1	1	1						
					1	2	3	2	1					
				1	3		7	6	3	1				
			1	4	4	10	13	16	10	4	1			
		1	5	9	18	27	39	39	30	15	5	1		
	1	6	15	32	54	84		108	84	50	21	6	1	
1	7	22	53	101	170	138	192	192	242	155	77	28	7	1

7. Feladat:

Hányféleképpen olvasható ki a BUDAPESTI szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet csak haladni és nem szabad kétszer egymás után jobbra lefelé lépni?

				B				
			U	**U**	**U**			
		D	**D**	**D**	**D**	**D**		
	A	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	
P	**P**	**P**	**P**	**P**	**P**	**P**	**P**	**P**
	E	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	
		S	**S**	**S**	**S**	**S**		
			T	**T**	**T**			
				I				

Megoldás:

Ebben a feladatban az előzőhöz képest az is különbség, hogy nem lehet minden mezőről 3 – féleképpen továbbhaladnunk, hanem van ahol csak 1 vagy 2 lehetőségünk van erre.

Összesen ezúttal 8 lépésre lesz szükségünk, s mivel a kezdő és utolsó betű is a szimmetriatengelyen helyezkedik el, így a balra (B) és jobbra (J) lépéseknek a száma meg kell, hogy egyezzen. Ezek alapján nézzük meg milyen lehetőségek adódhatnak számunkra.

Első esetben 8 darab F (függőleges) - et 1 - féleképpen rakhatunk sorba.

Második esetben, ha 1 darab B és 1 darab J betűnk van, akkor 6 darab F - et kell még hozzávennünk. Ezeket összesen $\frac{8!}{1!\cdot 1!\cdot 6!} = 56$ – féleképpen rakhatjuk sorba.

Harmadik esetben 2 darab B és 2 darab J áll rendelkezésünkre, s ekkor 4 darab F - et kell még felhasználnunk. Ezeket összesen $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 4!} = 420$ – féleképpen rakhatjuk sorba. Ebből azonban ki kell vennünk azokat a lehetőségeket, amikor a 2 darab J egymás mellé kerül. Vegyük egy blokknak a két darab J - t, s így csak 7 blokkot kell sorba rendeznünk, amit $\frac{7!}{1!\cdot 2!\cdot 4!} = 105$ – féleképpen tehetünk meg. Ezek alapján a harmadik esetben $420 - 105 = 315$ lehetőségünk van a kiolvasásra.

Negyedik esetben 3 darab B és 3 darab J van a sorban, s ekkor 2 darab F - et kell még felhasználnunk. A 3 darab B - t és 2 darab F - et $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ – féleképpen rakhatjuk le sorba. Ezt követően az 5 betű által meghatározott 6 hely (elől, hátul és közöttük 4) közül kell kiválasztanunk 3 - t a J - k számára úgy, hogy a sorrend nem számít, így ezt ismétlés nélküli kombinációval számíthatjuk ki, vagyis $\binom{6}{3} = 20$ – féleképpen tehetjük meg. Mivel a két eset függ egymástól, tehát minden sorba rendezés esetén 20 elhelyezése lehetséges a J betűknek, ezért összesen $10 \cdot 20 = 200$ – féleképpen olvashatjuk ki.

Ötödik esetben 4 darab B és 4 darab J áll rendelkezésünkre. Ekkor a 4 darab B lerakása után az általuk meghatározott 5 helyből (elől, hátul és közöttük 3) kell kiválasztanunk 4 - t a J - k számára, amit $\binom{5}{4} = 5$ – féleképpen tehetünk meg.

Az öt eset külön – külön mind megfelelő, így a megoldás: $1 + 56 + 315 + 200 + 5 = 577$.

Ezúttal az ábra számokkal való kitöltésétől eltekinthetünk, mert a kikötés (két jobbra nem lehet egymás után) jelentősen megnehezítené azt a korábbiakhoz képest.

8. Feladat:

Mennyi 6 betűből álló (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a következő betűkből?

***a)* A, B, C, D, E, F**

***b)* A, A, B, C, C, C**

Megoldás:

Mivel nemcsak értelmes szavakat keresünk, ezért elegendő a betűk sorba rendezését tekinteni.

a) Nincs ismétlődő betű, így az ismétlés nélküli permutáció képletével kiszámítható a megoldás: $6! = 720$.

Így tehát összesen 720 „szót” képezhetünk a megadott betűkből.

b) Az A és C betűkből több is előfordul, ezért itt az ismétléses permutáció képletét kell használnunk: $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$.

Így tehát összesen 60 „szót” képezhetünk a megadott betűkből.

9. Feladat:

Mennyi 4 betűből álló (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető az E, F, G, H, I, J betűkből, ha egy betűt csak egyszer használhatunk fel?

Megoldás:

Mivel itt 6 betűből kell kiválasztanunk 4 betűt úgy, hogy egy betűt csak egyszer választhatunk, s a kiválasztás során számít a sorrend, ezért az ismétlés nélküli variáció képletét kell alkalmaznunk: $\frac{6!}{(6-2)!} = 30$.

Így tehát összesen 30 „szót” képezhetünk a megadott betűkből.

10. Feladat:

Mennyi 3 betűből álló (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető az O, P, R, S, T, U betűkből, ha egy betűt többször is felhasználhatunk?

Megoldás:

Mivel itt 6 betűből kell kiválasztanunk 3 betűt úgy, hogy egy betűt többször is választhatunk, s a kiválasztás során számít a sorrend, ezért az ismétléses variáció képletét kell alkalmaznunk: $6^3 = 216$.

Így tehát összesen 216 „szó" képezhető a megadott betűkből.

11. Feladat:

Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a BARCELONA szó összes betűinek felhasználásával, ha az A és B betűk nem kerülhetnek egymás mellé?

Megoldás:

A kezdő szavunk 9 betűből áll, s benne összesen 2 darab A és 1 darab B található.

A megoldás során először nézzük meg, hogy a kijelölt betűk a képzett szavakban hányféleképpen helyezhetőek el a feltételnek megfelelően.

Amennyiben az első helyre lehelyezem az egyik betűt a háromból, akkor a következő betűt a második helyre nem rakhatom le. Tegyük le a harmadik helyre, s ekkor az utolsó megmaradt betűnket a negyedik hely kivételével bármelyikre lerakhatjuk, s ez 5 darab lehetőség. Ezután változtassunk annyit, hogy a második betűnket nem a harmadik, hanem a negyedik helyre tegyük le. Ekkor a harmadik betű elhelyezésére 4 darab lehetőség adódik. Ezt tovább folytatva kapjuk, hogyha a második betűt az ötödik, hatodik, illetve hetedik helyre tesszük le, akkor a harmadik betű helyének megválasztására pontosan $3, 2$, illetve 1 darab lehetőségünk lesz. Tehát, ha az első helyre pakolunk le a kijelölt betűkből, akkor a másik két betűt összesen 15 - féleképpen helyezhetjük el a feltételnek megfelelően.

Ezt követően a második helyre tegyük le az első betűnket a háromból. Ekkor a második betűt csak a negyedik, ötödik, hatodik, hetedik helyre tehetjük le, s így a harmadik betű helyének megválasztására $4, 3, 2$, illetve 1 lehetőségünk lesz. Tehát, ha a második helyre pakolunk le a kijelölt betűkből, akkor a másik két betűt 10 - féleképpen helyezhetjük el. Ezek alapján könnyen kiszámítható, hogyha az első betűnket a harmadik, negyedik, vagy ötödik helyre pakoljuk le, akkor a másik két betűt összesen $6, 3$, illetve 1 - féleképpen helyezhetjük el. A három betű a szavak képzésénél így $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$ - féleképpen helyezhető el.

Ezek után még azt kell figyelembe vennünk, hogy egy tetszőlegesen választott elhelyezésnél a kijelölt 3 betű, illetve a megmaradt 6 betű hányféleképpen rakható le. Ezek kiszámításához az ismétléses, illetve az ismétlés nélküli permutációk képleteit kell alkalmazni. A három betűt (2 darab A, 1 darab B) $\frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$ - féleképpen rakhatjuk sorba, míg a maradék hat betűt $6! = 720$ - féleképpen tehetjük le. Mivel ezek a lerakások függnek egymástól, így összesen $720 \cdot 3 = 2160$ „szót” képezhetünk, ha előre kijelöltük a három betű helyét.

Mivel azonban 35 - féleképpen választhatjuk meg a kijelölt betűk helyeit, ezért a megoldás $35 \cdot 2160 = 75\,600$ lesz. Tehát összesen $75\,600$ „szót” képezhetünk a BARCELONA betűiből úgy, hogy az A és B betűk nem kerülnek egymás mellé.

12. Feladat:

Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a FELEJTHETETLEN szó összes betűinek felhasználásával, ha az E betűk nem kerülhetnek egymás mellé?

Megoldás:

A kezdő szavunk 14 betűből áll, s benne összesen 5 darab *E* betű található. A feladatot az előző mintájára is megoldhatjuk, de tekinthetünk másféle megközelítést is. Most először azt nézzük meg, hogy az *E* betűk közötti „hézagok" terjedelmei miként alakulhatnak a szavak képzése során. Mivel a „hézagok" hosszainak összege 9, ezért az összegek a következők lehetnek (a **|** jel az *E* betűk helyeit jelölik):

- 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4
- 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3
- | 1 | 1 | 1 | 1 | 5   1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
- 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2
- | 1 | 1 | 1 | 2 | 4   1 | 1 | 1 | 2 | 4 |
- | 1 | 1 | 1 | 3 | 3   1 | 1 | 1 | 3 | 3 |
- | 1 | 1 | 1 | 6 |
- | 1 | 1 | 2 | 2 | 3   1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
- | 1 | 1 | 2 | 5 |
- | 1 | 1 | 3 | 4 |
- | 1 | 2 | 2 | 2 | 2   1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

- | 1 | 2 | 2 | 4 |

- | 1 | 2 | 3 | 3 |

- | 2 | 2 | 2 | 3 |

Látható, hogy a „hézagok” legkisebb terjedelme 1, míg a legnagyobb terjedelme 6 lehet. Továbbá a „hézagok” száma 4, ha az E betűk az első és utolsó helyen is szerepelnek; 5, ha 1 darab E betű szerepel az első vagy az utolsó helyen és 6, ha nincs E betű sem az első sem az utolsó helyen. A fentiek alapján összesen 19 - féleképpen alakulhatnak a „hézagok” terjedelmei és az E betűk elhelyezései.

Ezt követően azt kell megnéznünk, hogy az egyes lehetőségeknél a terjedelmek hányféleképpen rendezhetők sorba. Ezek kiszámításához az ismétléses permutáció képletét kell alkalmaznunk:

- $\frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6$

- $\frac{6!}{4! \cdot 1! \cdot 1!} = 30$

- $2 \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 10$

- $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

- $2 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = 40$

- $2 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 20$

- $\frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

- $2 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$

- $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=12$

- $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=12$

- $2\cdot\frac{5!}{4!\cdot 1!}=10$

- $\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!}=12$

- $\frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!}=12$

- $\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4$

Ekkor összesen $6+30+10+20+40+20+4+60+12+12+10+12+12+4=252$ - féleképpen alakulhat a „hézagok” nagysága és sorrendje.

Végül még azt kell megvizsgálnunk, hogy a hézagokba az 5 darab E betűn kívül hányféleképpen helyezhető el a megmaradt 9 betű. Mivel a betűk között szerepel 3 darab T, 2 darab L és $1-1$ darab F, J, H, N betű, ezért ezen betűk „hézagokba” való elhelyezésének összes lehetséges száma: $\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=30\ 240$.

Ezek alapján az összes képezhető „szavak” számát megkaphatjuk a „hézagok” alakulásának és a maradék 9 betű összes lehetséges sorrendjének szorzataként: $252\cdot 30\ 240=7\ 620\ 480$.

Tehát a FELEJTHETETLEN szó betűiből összesen 7 620 480 (nem feltétlen értelmes) szó képezhető úgy, hogy minden betűt felhasználunk és az E betűk nem kerülnek egymás mellé.

13. Feladat:

Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető az ABRAKADABRA szó összes betűinek felhasználásával, ha az A betűk nem kerülhetnek egymás mellé?

Megoldás:

A kezdő szavunk 11 betűből áll, s benne összesen 5 darab A betű található. A feladat megoldható az előzőekhez hasonlóan, de egy újabb eljárással is próbálkozhatunk. Először is tekintsük az A betűk kivételével megmaradó betűket, s helyezzük le őket egy adott sorba. Mivel ezek között van $2\,B, 2\,R, 1\,K$ és $1\,D$ betű, ezért az összes lehetséges sorrend kiszámításához az ismétléses permutáció képletét kell alkalmaznunk: $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 180$.

Ezt követően már csak az A betűket kell a feltételnek megfelelően lehelyeznünk. Mivel a 6 betűhöz képest összesen 7 helyre (|x|x|x|x|x|x|) rakhatjuk le az A betűket, ezért a 7 helyből kell kiválasztanunk 5 - öt úgy, hogy a sorrend az A betűk azonossága miatt nem számít. Ehhez az ismétlés nélküli kombináció képletét kell alkalmaznunk: $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$.

Ezek alapján a megoldást megkapjuk az A betűk összes lehetséges elhelyezkedésének és a másik 6 betű összes lehetséges sorrendjének szorzataként: $21 \cdot 180 = 3\,780$.

Tehát az ABRAKADABRA szó betűiből összesen $3\,780$ (nem feltétlen értelmes) szó képezhető úgy, hogy minden betűt felhasználunk és az A betűk nem kerülnek egymás mellé.

Brósch Zoltán