# Megoldások

**1. Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor skaláris szorzatát, ha $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ és a közbezárt szög $\varphi = 55°$!**

Megoldás:
Alkalmazzuk a megfelelő képletet:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 5 \cdot 4 \cdot \cos 55° \approx 11{,}47.$

**2. Határozd meg a következő vektorok skaláris szorzatát!**

***a)*** $\vec{a}\,(10;\ -3)$ **és** $\vec{b}\,(-1; 5)$

***b)*** $\vec{c}\,(1; 2; 5)$ **és** $\vec{d}\,(-1; 3; -7)$

Megoldás:
Alkalmazzuk a megfelelő képletet:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 10 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 = -10 - 15 = -25.$

b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2 + c_3 \cdot d_3 = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7) = -30$

**3. Határozd meg a következő vektorok hajlásszögét!**

***a)*** $\vec{a}\,(2; 3)$ **és** $\vec{b}\,(-5;\ -1)$

***b)*** $\vec{c}\,(2; -3; 5)$ **és** $\vec{d}\,(-1; -2; 5)$

Megoldás:
Alkalmazzuk a skaláris szorzat képleteiet:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} \cdot \cos\varphi = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\varphi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-1) = -10 - 3 = -13$

Ebből felírhatjuk a következőt: $\sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\varphi = -13.$

Ezek alapján a megoldás: $\varphi = 135°.$

b) A skaláris szorzat képleteit összevonva, egyetlen képlettel is kiszámíthatjuk a hajlásszöget:

$$\cos\varphi = \frac{c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2 + c_3 \cdot d_3}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) + 5 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5^2}} \quad \rightarrow \quad \varphi \approx 30{,}81°$$

**4. Egy háromszög csúcsai az $A\,(3; -1), B\,(2; 4)$ és $C\,(-1; 5)$ koordinátájú pontok. Számítsd ki a háromszög szögeit és területét!**

Megoldás:
A háromszög szögeihez határozzuk meg az adott csúcsból kiinduló két vektor hajlásszögét.

Számítsuk ki először az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok által bezárt $\alpha$ szöget.

$\overrightarrow{AB}\,(-1; 5) \quad \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{AC}\,(-4; 6) \quad \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{52}$

A skaláris szorzat segítségével felírhatjuk a következőt: $\cos\alpha = \frac{(-1) \cdot (-4) + 5 \cdot 6}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{52}}$.

Ebből azt kapjuk, hogy $\alpha \approx 22{,}38°$.

Számítsuk ki most a $\overrightarrow{BA}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorok által bezárt $\beta$ szöget.

$\overrightarrow{BA}\,(1; -5) \quad \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{BC}\,(-3; 1) \quad \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

A skaláris szorzat segítségével felírhatjuk a következőt: $\cos\beta = \frac{1 \cdot (-3) + (-5) \cdot 1}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{10}}$.

Ebből azt kapjuk, hogy $\beta \approx 119{,}74°$.

Számítsuk ki végül a $\overrightarrow{CA}$ és a $\overrightarrow{CB}$ vektorok által bezárt $\gamma$ szöget.

$\overrightarrow{CA}\,(4; -6) \quad \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$

$\overrightarrow{CB}\,(3; -1) \quad \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

A skaláris szorzat segítségével felírhatjuk a következőt: $\cos\gamma = \frac{4 \cdot 3 + (-6) \cdot (-1)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{10}}$.

Ebből azt kapjuk, hogy $\gamma \approx 37{,}88°$.

Ezek alapján a háromszög területe: $T = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{52} \cdot \sin 37{,}88°}{2} \approx 7$.

**5. Két vektor hossza 3 $cm$, illetve 4 $cm$. Legalább és legfeljebb mekkora lehet a skaláris szorzatuk értéke?**

Megoldás:
Írjuk fel a két vektor skaláris szorzatát: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 \cdot \cos\varphi = 12 \cdot \cos\varphi$.

Tudjuk, hogy $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$.

Ezek alapján a megoldás: $-12 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 12$.

**6. Két egymással 60° - os szöget bezáró vektor skaláris szorzata 4. Ha az egyik vektor hossza a másik kétszerese, akkor milyen hosszúak a vektorok?**

Megoldás:
Legyen $|\vec{a}| = 2 \cdot |\vec{b}|$.

A skaláris szorzat segítségével felírhatjuk a következőt: $2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60° = 4$.

Ebből azt kapjuk, hogy $|\vec{b}| = 2$, s ezt visszahelyettesítve pedig $|\vec{a}| = 4$.

**7. Adott az $\vec{a}\,(2; 2)$ és $\vec{b}\,(1; -6)$ vektor. Mennyi a $\vec{c}$ koordinátája, ha tudjuk, hogy $\vec{a} \cdot \vec{c} = 14$ és $\vec{b} \cdot \vec{c} = -7$?**

Megoldás:
Legyen a $\vec{c}\,(c_1; c_2)$.

Ekkor a skaláris szorzatok segítségével felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 &= 14 \\ 1 \cdot c_1 + (-6) \cdot c_2 &= -7 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása $c_1 = 5$ és $c_2 = 2$, vagyis a keresett vektor a $\vec{c}\,(5; 2)$.

**8. Az $\vec{a}\,(-2; 1; -3)$ és $\vec{b}\,(5; -2; z)$ vektorok merőlegesek egymsára. Mekkora a $z$ érétke?**

Megoldás:
Mivel a merőleges vektorok skaláris szorzata 0, így felírhatjuk a következőt:

$-2 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) - 3 \cdot z = 0$

Ezek alapján a megoldás $z = -4$.

**9. Határozd meg a $\vec{b}$ koordinátáit, ha tudjuk, hogy merőleges az $\vec{a}$ – ra, továbbá $\vec{a}\,(10; -5)$ és $|\vec{b}| = \sqrt{10}$!**

Megoldás:
Legyen a $\vec{b}\,(b_1; b_2)$.

Ekkor a szöveg alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{r} 10b_1 - 5b_2 = 0 \\ \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2} = \sqrt{10} \end{array}\right\}$$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $b_2 = 2b_1$.

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe rendezés után a megoldás $b_1 = \sqrt{2}$, vagy $b_1 = -\sqrt{2}$.

Ezt visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $b_2 = 2 \cdot \sqrt{2}$ vagy $b_2 = -2 \cdot \sqrt{2}$.

Ezek alapján két megoldás adódik: $\vec{b}\left(\sqrt{2}; 2 \cdot \sqrt{2}\right)$, vagy $\vec{b}\left(-\sqrt{2}; -2 \cdot \sqrt{2}\right)$.

**10. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge $60°$. Tudjuk, hogy $(\vec{a} - \vec{b})$ merőleges $\vec{b}$ – re. Milyen kapcsolat van az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor hossza között?**

Megoldás:
A feladat szövege alapján $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, vagyis $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$.

Ebből a következő adódik: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60° - |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0° = 0$.

Rendezés után azt kapjuk, hogy $|\vec{b}| \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| - |\vec{b}|\right) = 0$.

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ezek alapján $|\vec{b}| = 0$, vagy $\frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| - |\vec{b}| = 0$, amiből $|\vec{a}| = 2 \cdot |\vec{b}|$.

**11. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egységvektorok 60° - os szöget zárnak be. Miylen $\lambda$ esetén lesz $(\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b})$ merőleges $\vec{b}$ – re?**

Megoldás:
A feladat szövege alapján $(\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, vagyis $\vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$.

Ebből a következő adódik: $1 \cdot 1 \cdot \cos 60° + \lambda \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 0$.

Ezek alapján a megoldás $\lambda = -\frac{1}{2}$.

**12. Mekkora az egyenlő, de nem 0 hosszúságú $\vec{a}$ és $\vec{b}$ szöge, ha $(\vec{a} + 2\vec{b})$ merőleges $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ – re!**

Megoldás:
A feladat szövege alapján $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$.

Ebből a következő adódik: $5 \cdot |\vec{a}|^2 + 6 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi - 8 \cdot |\vec{b}|^2 = 0$.

Mivel $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, így rendezés után azt kapjuk, hogy $|\vec{b}|^2 \cdot (5 + 6 \cdot \cos \varphi - 8) = 0$.

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ezek alapján $|\vec{b}|^2 = 0$, vagyis $|\vec{b}| = 0$, vagy $5 + 6 \cdot \cos \varphi - 8 = 0$, amiből $\varphi = 60°$.

**13. Legyen $\vec{a}\,(3; 4)$ és $\vec{b}\,(-2; 1)$. Határozd meg az $\vec{a}$ – nak $\vec{b}$ – re, és a $\vec{b}$ – nek $\vec{a}$ – ra eső merőleges vetületének hosszát!**

Megoldás:
Tudjuk, hogy $\cos \varphi = -\cos(180° - \varphi)$.

Ebből az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ – re eső merőleges vetületének hosszát megkaphatjuk a következőképpen:

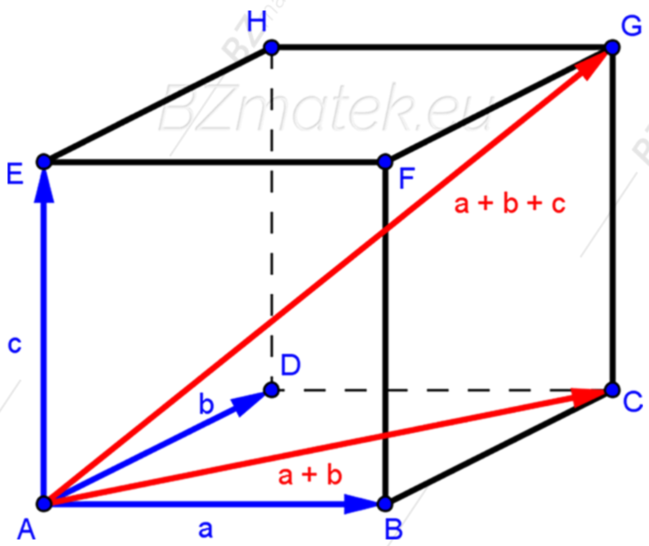
$$|\vec{a}| \cdot |\cos \varphi| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ – ra eső merőleges vetületének hossza pedig:

$$|\vec{b}| \cdot |\cos \varphi| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{|3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

**14. Egy kocka élei 1 egység hosszúságúak. Ennek az egyik csúcsából kiinduló élvektorait jelölje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Mivel egyenlők a következő skaláris szorzatok: $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{a}$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \cdot \vec{b}$; $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c}$; $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{b}+\vec{c})$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \cdot (\vec{a}-\vec{c})$?**

Megoldás:
Tekintsük a következő ábrát:




A vektorok által bezárt szögek megállapítása után felírhatjuk a skaláris szorzatok értékeit:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$$

$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{a} = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45° = 1$$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos 54{,}74° = 1 \qquad \rightarrow \qquad \text{az } AGD\ \Delta \text{ - ben: } tg\ \varphi = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

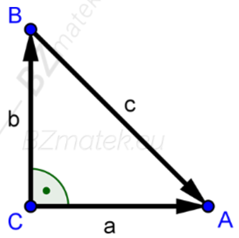
$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}+\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 90° = 0$$

$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \cdot (\vec{a}-\vec{c}) = \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2 = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = 0$$

**15. Egy egyenlőszárú, derékszögű háromszögben a befogók hossza 1 egység. Az oldalvektorok: $\vec{a} = \overrightarrow{CA}; \vec{b} = \overrightarrow{CB}; \vec{c} = \overrightarrow{BA}$. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét: $\vec{a} \cdot \vec{b}; \vec{a} \cdot \vec{c}; \vec{b} \cdot \vec{c}; (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$!**

Megoldás:
Tekintsük a következő ábrát:




A vektorok által bezárt szögek megállapítása után felírhatjuk a skaláris szorzatok értékeit:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$

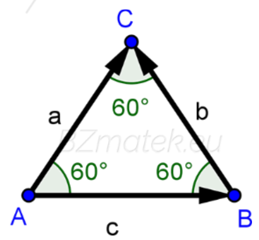
$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° = 1$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135° = -1$

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{c} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 0° = 2$

**16. Az egység oldalú, szabályos $ABC\,\Delta$ - ben $\vec{a} = \overrightarrow{AC}; \vec{b} = \overrightarrow{BC}; \vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét: $\vec{a} \cdot \vec{b}; \vec{b} \cdot \vec{c}; (\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a}; (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$!**

Megoldás:
Tekintsük a következő ábrát:




A vektorok által bezárt szögek megállapítása után felírhatjuk a skaláris szorzatok értékeit:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}$

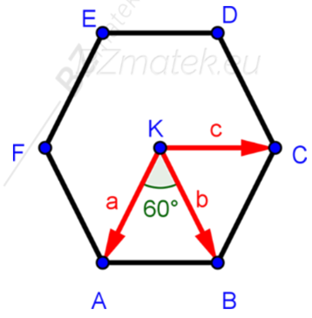
$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = -\frac{1}{2}$

$(\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° - 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

$(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

**17. Egy szabályos hatszög középpontjából három szomszédos csúcsba mutató vektor $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$. A hatszög oldalának hossza 1 egység. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét: $\vec{a} \cdot \vec{b}; \vec{a} \cdot \vec{c}; (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}; (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$!**

Megoldás:
Tekintsük a következő ábrát:




A vektorok által bezárt szögek megállapítása után felírhatjuk a skaláris szorzatok értékeit:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}$

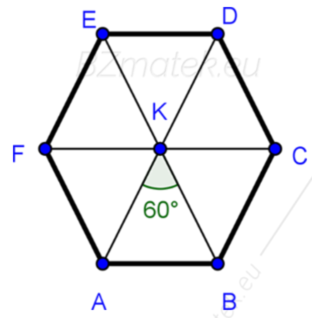
$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = -\frac{1}{2}$

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{c} = -1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = -1$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

**18. Egy szabályos $ABCDEF$ hatszög oldalainak hossza 1 egység. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FC}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE}$!**

Megoldás:
Tekintsük a következő ábrát:




A vektorok által bezárt szögek megállapítása után felírhatjuk a skaláris szorzatok értékeit:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 180° = -1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FC} = 1 \cdot 2 \cdot \cos 0° = 2$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 60° = \frac{3}{2}$

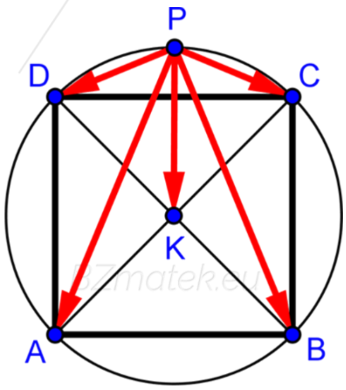
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 60° = \frac{3}{2}$

**19. Legyen az $ABCD$ négyzet köré írt körének egy pontja a $P$ pont. Bizonyítsd be, hogy ha a négyzet oldalaiank hossza 1 egység, akkor**

***a)*** $\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)=2$

***b)*** $\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}\right)=0$

<u>Megoldás:</u>
Tekintsük a következő ábrát:




a) Először írjuk fel a zárójeles kifejezéseket egyszerűbb alakban:

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{PK}-\overrightarrow{KA}=2\cdot\overrightarrow{PK}$$

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{PK}-\overrightarrow{KB}=2\cdot\overrightarrow{PK}$$

Ezek alapján adódik a bizonyítandó állítás:

$$\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)=2\cdot\overrightarrow{PK}\cdot 2\cdot\overrightarrow{PK}=4\cdot\overrightarrow{PK}^2=4\cdot\left|\overrightarrow{PK}\right|^2=4r^2=4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$$

b) Először írjuk fel a zárójelben szereplő kifejezéseket egyszerűbb alakban:

$$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DB}$$

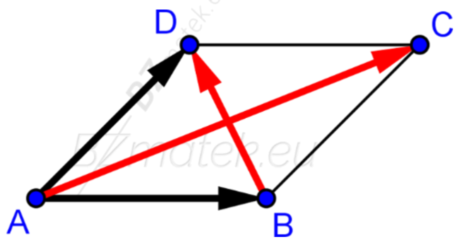
Mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást, így adódik a bizonyítandó állítás:

$$\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}\right)=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot\cos 90°=0$$

**20. Bizonyítsd be, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!**

Megoldás:
Legyen a két átlóvektor $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$.

Tekintsük a következő ábrát:




Ebből felírhatjuk a következőt:

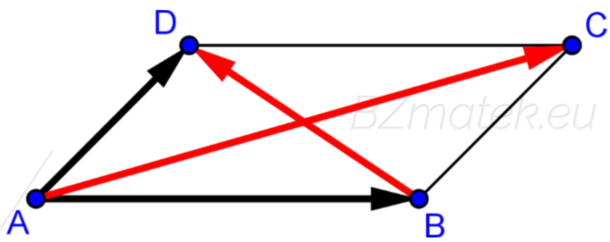
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AD}^2 \cdot \overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = a - a = 0$$

Mivel az átlóvektorok skaláris szorzata 0, így a vektorok merőlegesek egymásra.

**21. Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegével!**

Megoldás:
Legyen a két átlóvektor $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$.

Tekintsük a következő ábrát:




Ebből felírhatjuk a következőt:

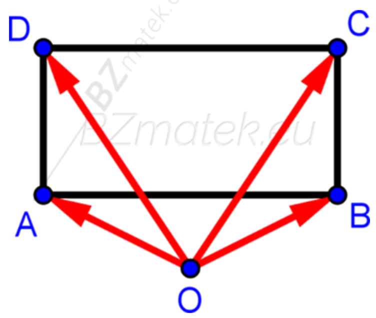
$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2 =$$

$$= \overrightarrow{AD}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 2 \cdot \overrightarrow{AD}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB}^2 =$$

$$= 2 \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + 2 \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

**22. Bizonyítsd be, hogy ha $\boldsymbol{ABCD}$ téglalap és $\boldsymbol{O}$ a tér tetszőleges pontja, akkor $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}^2 + \overrightarrow{\boldsymbol{OC}}^2 = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}^2 + \overrightarrow{\boldsymbol{OD}}^2$!**

Megoldás:
Tekintsük a következő ábrát:




Az összefűzési szabály segítségével a két oldalt alakítsuk át a következőképpen:

$$\overrightarrow{OA}^2 + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}\right)^2$$

Ebből zárójelbontás és rendezés után a következő adódik:

$$\overrightarrow{DC}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Mivel a téglalap oldalai merőlegesek, így $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, továbbá tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ezek alapján azonosságot kapunk: $\overrightarrow{DC}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

**23. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{DA}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{DB}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{CA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{DC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = 0$, ha $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ tetszőleges pont!**

Megoldás:
Megfelelő átalakítások után adódik a bizonyítandó állítás:

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= \overrightarrow{DA} \cdot \left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

**24. Bizonyítsd be, hogy $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}$ merőleges $\vec{a}$ – ra!**

Merőleges:
Írjuk fel a két vektor skaláris szorzatát:

$[(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}]\cdot\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{a})-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{a})=0.$

Mivel a vektorok skaláris szorzata 0, így a vektorok merőlegesek egymásra.

**25. Bizonyítsd be, hogy ha $a,b,c,d\in\mathbb{R}^+$, akkor $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geq a\cdot c+b\cdot d$!**

Megoldás:
Legyen $\vec{v}\,(a;b)$ és $\vec{w}\,(c;d)$.

Írjuk fel a két vektor skaláris szorzatát: $a\cdot c+b\cdot d=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos\varphi$.

Mivel $\cos\varphi\leq 1$, így adódik a bizonyítandó állítás: $a\cdot c+b\cdot d\geq\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

**26. Bizonyítsd be, hogy bármely $a,b,c$ valós számra $a+b+c\leq\sqrt{3\cdot(a^2+b^2+c^2)}$!**

Megoldás:
Legyen $\vec{v}\,(a;b;c)$ és $\vec{w}\,(1;1;1)$.

Írjuk fel a két vektor skaláris szorzatát:

$a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\cos\varphi.$

Ebből rendezés után a következő adódik: $a+b+c=\sqrt{3\cdot(a^2+b^2+c^2)}\cdot\cos\varphi$.

Mivel $\cos\varphi\leq 1$, így adódik az állítás: $a+b+c\leq\sqrt{3\cdot(a^2+b^2+c^2)}$.

**27. Bizonyítsd be, hogy $4a+3b\leq\sqrt{a^2+9}\cdot\sqrt{b^2+16}$! Mikor teljesül az egyenlőség?**

Megoldás:
Legyen $\vec{v}\,(a;3)$ és $\vec{w}\,(4;b)$.

Írjuk fel a két vektor skaláris szorzatát: $4a+3b=\sqrt{a^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+b^2}\cdot\cos\varphi$.

Mivel $\cos\varphi\leq 1$, így adódik a bizonyítandó állítás: $4a+3b\leq\sqrt{a^2+9}\cdot\sqrt{16+b^2}$.

A két oldal akkor egyenlő, ha $\varphi=0°$, vagyis $a\cdot b=3\cdot 4=12$.

**28. Mivel egyenlő a következő vektoriális szorzatok: $\vec{\imath} \times \vec{\jmath}; \vec{\jmath} \times \vec{k}; \vec{k} \times \vec{\imath}; \vec{\jmath} \times \vec{\imath}; \vec{k} \times \vec{\jmath}; \vec{\imath} \times \vec{k}$?**

Megoldás:
A vektoriális szorzat definíciójából a következők adódnak:

$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$ $\quad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$ $\quad \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ $\quad \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$ $\quad \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$ $\quad \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$

**29. Számítsd ki az $ABCD$ paralelogramma területét, ha $A\,(1; 2; 3), B(2; -1; 3)$ és $C(5; -2; -3)$!**

Megoldás:
A paralelogramma területét felírhatjuk következőképpen: $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \sin\varphi$.

Először számítsuk ki az oldalvektorok hosszát:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{46}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{68}$$

Ezt követően koszinusz - tétel segítségével számítsuk ki a közbezárt szöget:

$$\left(\sqrt{68}\right)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{46}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{46} \cdot \cos\varphi \qquad \rightarrow \qquad \varphi \approx 106{,}24°$$

Ezek alapján a megoldás: $T = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{46} \cdot \sin 106{,}24° \approx 20{,}59$.

**30. Határozd meg az $\vec{a} \times \vec{b}$ koordinátáit, ha $\vec{a}\,(2; 3)$ és $\vec{b}\,(-1; -3)$!**

Megoldás:
Először számítsuk ki a két vektor hosszát:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \qquad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

Ezt követően számítsuk ki a két vektor hajlásszögét:

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} \qquad \rightarrow \qquad \varphi \approx 164{,}74°$$

Ebből számítsuk ki a következőt: $|\vec{a}| \times \left|\vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi = \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin 164{,}74° = 3$.

Ezek alapján a megoldás: $\vec{a} \times \vec{b}\ (0; 0; -3)$.