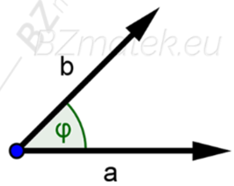
Vektorok II.

DEFINÍCIÓ: (Vektorok hajlásszöge)
Két vektor hajlásszögének azt a φ $(0° \leq \varphi \leq 180°)$ szöget nevezzük, amelyet a vektorok egy közös pontból felmért reprezentánsai által meghatározott félegyenesek egymással alkotnak.



Megjegyzés:
Ha a két vektor egyike nullvektor, akkor hajlásszögük nem egyértelmű.

DEFINÍCIÓ: (Skaláris szorzat)
Legyen az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor hajlásszöge φ $(0° \leq \varphi \leq 180°)$. Ekkor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris (belső) szorzatán az $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ számot értjük. Jelölés: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Megjegyzés:

- *Geometriai jelentés: Két vektor skaláris szorzata az egyik vektor hosszának és a másik vektor előzőre eső merőleges vetülete hosszának szorzata.*
- *A skaláris szorzat nem művelet, mert egy rendezett vektorpárhoz rendel egy valós számot, s nem egy halmaz összes rendezett elempárjához rendel egy elemet a halmazból.*

A skaláris szorzás tulajdonságai ($\lambda \in \mathbb{R}$):

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Megjegyzés:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$, *vagyis a skaláris szorzat általában nem asszociatív, mert az egyik az* $\vec{a}$, *a másik a* $\vec{c}$ *irányába mutató vektor. Egyenlőek: pl. a két vektor párhuzamos egymással.*

Speciális helyzetű vektorok skaláris szorzata:

- Ha a két vektor egyirányú, akkor a hajlásszögük 0° és ekkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- Ha a két vektor ellentétes irányú, akkor a hajlásszögük 180° és ekkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- Ha a két vektor merőleges egymásra, akkor a hajlásszögük 90° és ekkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Megjegyzés:
Egy vektor önmagával vett skaláris szorzata $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, mert ekkor a hajlásszög 0°.

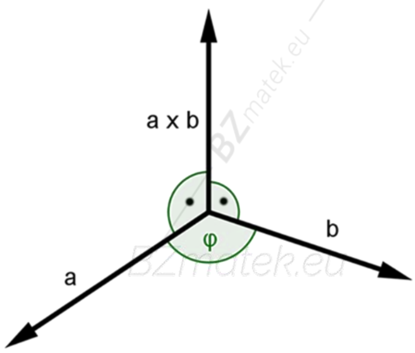
TÉTEL:
Az $\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$ és $\vec{b}\ (b_1;\ b_2)$ vektor skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összegével egyenlő. Jelöléssel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

Megjegyzés:

- *A két vektor által bezárt szög kifejezve a képletekből:* $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$.
- *Térbeli vektorok esetén hasonlóan számítható ki a vektorok skaláris szorzata, illetve szöge.*

TÉTEL:
Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

DEFINÍCIÓ: (Vektoriális szorzat)
Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális (külső) szorzatán olyan $\vec{a} \times \vec{b}$ vektort értünk, amelynek hossza a vektorok abszolútértékének és hajlásszögük szinuszának szorzata, továbbá merőleges $\vec{a}$ – ra és $\vec{b}$ – re is úgy, hogy az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorok ilyen sorrendben jobbrendszert alkotnak. Jelöléssel: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$.



Megjegyzés:

Az $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ *szorzat értéke az* $\vec{a}$ *és a* $\vec{b}$ *vektorok által kifeszített paralelogramma területe.*

A vektoriális szorzat tulajdonságai ($\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$):

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Megjegyzés:

- *A vektoriális szorzat nem asszociatív.*
- *Lagrange – azonosság:* $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

TÉTEL:

Két vektor vektoriális szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor párhuzamos.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **K) Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor skaláris szorzatát, ha $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ és a közbezárt szög $\varphi = 55°$!**

2. **(K) Határozd meg a következő vektorok skaláris szorzatát!**

   a) $\vec{a}\,(10;\ -3)$ **és** $\vec{b}\,(-1; 5)$

   b) $\vec{c}\,(1; 2; 5)$ **és** $\vec{d}\,(-1; 3; -7)$

3. **(K) Határozd meg a következő vektorok hajlásszögét!**

   a) $\vec{a}\,(2; 3)$ **és** $\vec{b}\,(-5;\ -1)$

   b) $\vec{c}\,(2; -3; 5)$ **és** $\vec{d}\,(-1; -2; 5)$

4. **(K) Egy háromszög csúcsai az $A\,(3; -1)$, $B\,(2; 4)$ és $C\,(-1; 5)$ koordinátájú pontok. Számítsd ki a háromszög szögeit és területét!**

5. **(K) Két vektor hossza $3\ cm$, illetve $4\ cm$. Legalább és legfeljebb mekkora lehet a skaláris szorzatuk értéke?**

6. **(K) Két egymással $60°$ - os szöget bezáró vektor skaláris szorzata 4. Ha az egyik vektor hossza a másik kétszerese, akkor milyen hosszúak a vektorok?**

7. **(K) Adott az $\vec{a}\,(2; 2)$ és $\vec{b}\,(1; -6)$ vektor. Mennyi a $\vec{c}$ koordinátája, ha tudjuk, hogy $\vec{a} \cdot \vec{c} = 14$ és $\vec{b} \cdot \vec{c} = -7$?**

8. **(E) Az $\vec{a}\,(-2; 1; -3)$ és $\vec{b}\,(5; -2; z)$ vektorok merőlegesek egymsára. Mekkora a z érétke?**

9. **(E) Határozd meg a $\vec{b}$ koordinátáit, ha tudjuk, hogy merőleges az $\vec{a}$ – ra, továbbá $\vec{a}\,(10; -5)$ és $|\vec{b}| = \sqrt{10}$!**

10. (E) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge $60°$. Tudjuk, hogy $(\vec{a}-\vec{b})$ merőleges $\vec{b}$ – re. Milyen kapcsolat van az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor hossza között?

11. (E) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egységvektorok $60°$ - os szöget zárnak be. Miylen λ esetén lesz $(\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b})$ merőleges $\vec{b}$ – re?

12. (E) Mekkora az egyenlő, de nem 0 hosszúságú $\vec{a}$ és $\vec{b}$ szöge, ha $(\vec{a}+2\vec{b})$ merőleges $(5\vec{a}-4\vec{b})$ – re!

13. (E) Legyen $\vec{a}\ (3;4)$ és $\vec{b}\ (-2;1)$. Határozd meg az $\vec{a}$ – nak $\vec{b}$ – re, és a $\vec{b}$ – nek $\vec{a}$ – ra eső merőleges vetületének hosszát!

14. (E) Egy kocka élei 1 egység hosszúságúak. Ennek az egyik csúcsából kiinduló élvektorait jelölje $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Mivel egyenlők a következő skaláris szorzatok: $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}$; $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$; $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})$?

15. (K) Egy egyenlőszárú, derékszögű háromszögben a befogók hossza 1 egység. Az oldalvektorok: $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$; $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$; $\vec{c}=\overrightarrow{BA}$. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét: $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{a}\cdot\vec{c}$; $\vec{b}\cdot\vec{c}$; $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$!

16. (K) Az egység oldalú, szabályos $ABC\ \Delta$ - ben $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét: $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{b}\cdot\vec{c}$; $(\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}$; $(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$!

17. (K) Egy szabályos hatszög középpontjából három szomszédos csúcsba mutató vektor $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$. A hatszög oldalának hossza 1 egység. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét: $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{a}\cdot\vec{c}$; $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$; $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$!

18. (K) Egy szabályos $ABCDEF$ hatszög oldalainak hossza 1 egység. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CE}$!

19. (E) Legyen az $ABCD$ négyzet köré írt körének egy pontja a P pont. Bizonyítsd be, hogy ha a négyzet oldalaiank hossza 1 egység, akkor

a) $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})=2$

b) $(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD})=0$

20. (E) Bizonyítsd be, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

21. (E) Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegével!

22. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $ABCD$ téglalap és O a tér tetszőleges pontja, akkor $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$!

23. (E) Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, ha A, B, C, D tetszőleges pont!

24. (E) Bizonyítsd be, hogy $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}$ merőleges $\vec{a}$ – ra!

25. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, akkor $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \geq a \cdot c + b \cdot d$!

26. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely a, b, c valós számra $a + b + c \leq \sqrt{3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}$!

27. (E) Bizonyítsd be, hogy $4a + 3b \leq \sqrt{a^2 + 9} \cdot \sqrt{b^2 + 16}$! Mikor teljesül az egyenlőség?

28. (E) Mivel egyenlő a következő vektoriális szorzatok: $\vec{i} \times \vec{j}; \vec{j} \times \vec{k}; \vec{k} \times \vec{i}; \vec{j} \times \vec{i}; \vec{k} \times \vec{j}; \vec{i} \times \vec{k}$?

29. (E) Számítsd ki az $ABCD$ paralelogramma területét, ha $A\,(1; 2; 3), B(2; -1; 3)$ és $C(5; -2; -3)$!

30. (E) Határozd meg az $\vec{a} \times \vec{b}$ koordinátáit, ha $\vec{a}\,(2; 3)$ és $\vec{b}\,(-1; -3)$!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Czapáry Endre; 2009.; Geometriai feladatok gyűjteménye I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(9) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(11) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(12) Saját anyagok