Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Az $\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$ és $\vec{b}\ (b_1;\ b_2)$ vektor skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összegével egyenlő. Jelöléssel: $\vec{a}\ \cdot\ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

Bizonyítás:
Tekintsük a következő vektorokat: $\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$ és $\vec{b}\ (b_1;\ b_2)$.

Írjuk fel ezeket az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ bázisvektorok segítségével: $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$ és $\vec{b} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j}$.

A bázisvektorok szorzatából a következőket kapjuk:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0° = |\vec{i}|^2 = 1$

$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0° = |\vec{j}|^2 = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90° = 0$

Ezek alapján a két vektor szorzatából adódik a bizonyítandó állítás:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}) \cdot (b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j}) =$$

$$= a_1 \cdot b_1 \cdot |\vec{i}|^2 + a_2 \cdot b_1 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + a_2 \cdot b_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + a_2 \cdot b_2 \cdot |\vec{j}|^2 = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

■

TÉTEL:
Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Bizonyítás:
A bizonyítandó állítás a következő: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Tekintsük először azt az esetet, amikor két vektor merőleges egymásra.

Ekkor a skaláris szorzat értéke a következő:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$

Tekintsük most azt az esetet, amikor két vektor skaláris szorzata 0.

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ekkor vagy $\varphi = 90°$, vagy a két vektor közül legalább az egyik hossza 0, vagyis zérusvektor.

Mindkét esetben merőleges vektorokat kapunk, mert a nullvektor iránya tetszőleges, így tekinthetjük a két vektort merőlegesnek.

■