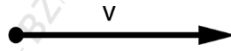


Vektorok I.

DEFINÍCIÓ: (Vektor)

Az egyenlő hosszúságú és egyirányú irányított (kezdő és végponttal rendelkező) szakaszoknak a halmazát vektornak nevezzük. Jele: \vec{v} ; \underline{v} ; \overline{AB} (ahol A a vektor kezdőpontja, B a végpontja).



Megjegyzés:

- *A vektor másképpen iránnyal rendelkező mennyiség.*
- *A vektort a reprezentánsával ábrázoljuk.*

DEFINÍCIÓ: (Vektor hossza)

A vektort meghatározó irányított szakasz hossza a vektor abszolútértéke. Jele: $|\vec{v}|$; $\|\vec{v}\|$.

DEFINÍCIÓ: (Egyállású vektorok)

Két vektort egyállásúnak (párhuzamosnak) nevezünk, ha a rájuk illeszkedő egyenesek párhuzamosak, vagy egybeesnek.

DEFINÍCIÓ: (Vektor iránya)

A vektort tartalmazó és a vektorral közös kezdőpontú félegyenes irányát a vektor irányának nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Egyirányú vektorok)

Két vektort egyirányúnak tekintünk, ha párhuzamosak és ugyanabba az irányba mutatnak.

Megjegyzés:

Ha a két vektor párhuzamos, de nem egyirányúak, akkor ellentétes irányúak.

DEFINÍCIÓ: (Ellentett vektor)

Ellentett vektornak nevezzük azt a vektort, amelynek nagysága megegyezik az eredeti vektor nagyságával, iránya pedig ellentétes. Jele: $-\vec{v}$.

DEFINÍCIÓ: (Egyenlő vektorok)

Két vektort egyenlőnek tekintünk, ha van közös reprezentánsuk, vagyis egyirányúak és egyenlő nagyságúak.

DEFINÍCIÓ: (Zérusvektor)

Zérusvektornak (nullvektornak) nevezzük azt a vektort, amelynek kezdő és végpontja megegyezik. Jele: $\vec{0}$.

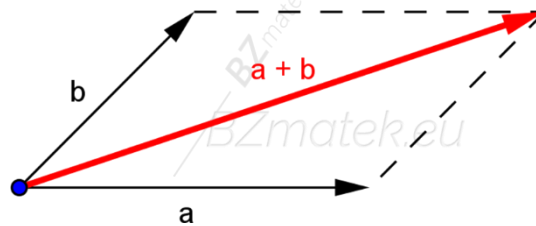
Megjegyzés:

A zérus vektor nagysága 0, iránya pedig tetszőleges.

Vektorok összegének meghatározása:

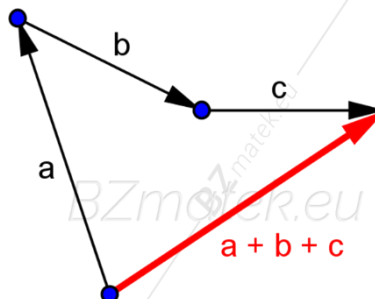
- Paralelogramma szabály:

Ez a módszer két (egymással nem párhuzamos) vektor összeadása esetén használható. A két vektort közös kezdőpontba toljuk, majd megrajzoljuk az általuk kifeszített paralelogrammát. Az összegvektor a közös kezdőpontból induló átlóvektor.



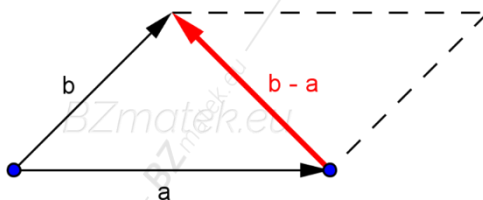
- Összefűzési (háromszög) szabály:

Ez a módszer több (akár párhuzamos) vektor összeadása esetén alkalmazható. A vektorokat összefűzzük úgy, hogy az egyik vektor végpontja legyen a következő vektor kezdőpontja. Az összegvektor (eredővektor) a szabad kezdőpontból mutat a szabad végpontba.



Vektorok különbségének meghatározása:

A két vektort közös kezdőpontba toljuk. A különbségvektor a kivonandó vektor végpontjából mutat a kisebbítendő vektor végpontjába.



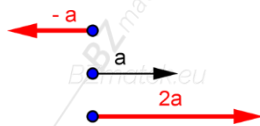
Megjegyzés:

A kivonást elvégezhetjük az ellentett vektor hozzáadásával is. Jelöléssel: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Vektor skalárral való szorzása:

Az \vec{a} vektornak egy λ valós számmal, skalárral való szorzatán, azt a $\lambda \cdot \vec{a}$ vektort értjük, amelynek hossza az \vec{a} hosszának λ – szorosa, iránya pedig:

- \vec{a} irányával megegyezik, ha $\lambda > 0$
- \vec{a} irányával ellentétes, ha $\lambda < 0$
- tetszőleges, ha $\lambda = 0$ (mert ekkor zérus vektor).



Megjegyzés:

Egy vektornak számmal történő szorzása nyújtást jelent, ha $|\lambda| > 1$ és zsugorítást, ha $|\lambda| < 1$.

Vektor műveletek tulajdonságai:

- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
- $\lambda \cdot \mu \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a})$

Megjegyzés:

- A vektorok kivonása nem kommutatív művelet: $(\vec{a} - \vec{b})$ és $(\vec{b} - \vec{a})$ ellentettvektorok.
- Ha $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, akkor $(\vec{a} + \vec{b})$ merőleges az $(\vec{a} - \vec{b})$ -re (és fordítva), mert a két vektor által kifeszített paralelogramma rombusz, melynek átlói merőlegesen felezi egymást.
- Ha \vec{a} merőleges a \vec{b} -re, akkor $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ (és fordítva), mert a vektorok által kifeszített paralelogramma téglalap, melynek átlói egyenlő hosszúak.

Vektorok felbontása:

DEFINÍCIÓ: (Lineáris kombináció)

Ha $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ tetszőleges vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ pedig valós számok, akkor az $\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{v}_k$ vektort a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

TÉTEL: (Vektor felbonthatóság tétele)

Legyen az \vec{a} és \vec{b} két egymással nem párhuzamos és nem nullvektor a síkban. Ekkor a velük egységű tetszőleges \vec{c} vektor (sorrendtől eltekintve) egyértelműen előállítható az \vec{a} és \vec{b} lineáris kombinációjaként, vagyis felbontható az \vec{a} és \vec{b} vektorokkal párhuzamos összetevőkre. Jelöléssel: $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

DEFINÍCIÓ: (Bázis vektor)

Egységű vektorok halmazában megadva egy nem párhuzamos vektorok alkotta \vec{a} és \vec{b} vektorpárt, azt mondjuk, hogy egy bázist adtunk meg. Ha $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$, akkor a $(\lambda; \mu)$ rendezett valós számpár tagjait a \vec{c} vektornak, az \vec{a} és \vec{b} bázisvektorokra (alapvektorokra) vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Jelöléssel: $\vec{c}_{(a;b)}$ ($\lambda; \mu$).

Megjegyzés:

- A továbbiakban speciális alapvektorokból álló (ortonormált) bázist használunk: bázisvektorok \vec{i} és \vec{j} ; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ (egységvektorok) és \vec{j} az \vec{i} -nek (+ 90°) - os elforgatottja.
- A sík egy adott pontjával (az origóval) együtt az \vec{i} és \vec{j} vektorpár Descartes -féle (derékszögű) koordináta – rendszert alkot.
- Ha $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{i} + \mu \cdot \vec{j}$, akkor a λ és μ együtthatókat a \vec{c} derékszögű koordinátáinak nevezzük. Jele: \vec{c} ($\lambda; \mu$).
- Ha egy vektort elosztjuk a hosszával, akkor a vele egyállású, azonos irányú egységvektort kapjuk. Jelöléssel: $\vec{v}_e = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

TÉTEL:

Adott bázis esetén az egysíkú vektorok és a λ, μ koordinátákból álló rendezett számpárok halmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető úgy, hogy minden vektorhoz az adott bázisra vonatkozó koordinátái alkotta számpárt rendeljük hozzá.

DEFINÍCIÓ: (Helyvektor)

Amennyiben a sík pontját egy rögzített (vonakoztatási) pontból kiinduló vektorral jelöljük ki, akkor ezt a ponthoz tartozó vektort, a pont helyvektorának nevezzük.

Megjegyzés:

- *A derékszögű koordináta - rendszerben egy pont helyvektora az origóból a pontba mutató vektor.*
- *A derékszögű koordináta - rendszerben megadott helyvektor jellemezhető egy rendezett számpárral, amely megegyezik a vektor végpontjának koordinátaival.*
- *A koordináta – rendszerben bármely vektorhoz egyértelműen létezik egy vele egyenlő nagyságú helyvektor.*
- *Ha a vektor kezdőpontja nem az origó, akkor szabad vektornak nevezzük.*
- *Az \vec{i} vektor az (1; 0) pontnak, a \vec{j} vektor a (0; 1) pontnak a helyvektora.*

Számolás koordinátákkal adott vektorokkal:

- Vektorok összegének és különbségének koordinátái:

TÉTEL:

Két vektor összegének, illetve különbségének koordinátáit megkaphatjuk, ha a megfelelő koordinátákat összeadjuk, illetve kivonjuk.

Jelöléssel:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} (a_1; a_2) \\ \vec{b} (b_1; b_2) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} + \vec{b} (a_1 + b_1; a_2 + b_2) \quad \vec{a} - \vec{b} (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

- Kezdő és végponttal adott vektor koordinátái:

TÉTEL:

A kezdő és végponttal adott vektor koordinátáit megkaphatjuk, ha a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

Jelöléssel:

$$\left. \begin{array}{l} A(a_1; a_2) \\ B(b_1; b_2) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2) \quad \overrightarrow{BA}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

- Vektor számszorosának koordinátái:

TÉTEL:

Egy vektor számszorosának koordinátáit megkaphatjuk, ha a vektor mindkét koordinátáját megszorozzuk az adott számmal.

Jelöléssel: $\vec{a}(a_1; a_2) \rightarrow \lambda \cdot \vec{a}(\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$

- Vektorok hossza:

TÉTEL:

Egy koordinátákkal adott vektor hossza egyenlő a koordináták négyzetösszegének négyzetgyökével.

Jelöléssel: $\vec{a}(a_1; a_2) \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Megjegyzés:

Ha $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$, akkor $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

- Vektor 90° - os elforgatottjának (merőleges vektorok) koordinátái:

TÉTEL:

Egy vektorra merőleges vektor koordinátáit megkaphatjuk, ha az adott vektor két koordinátáját felcseréljük és az egyik előjelét megváltoztatjuk.

Jelöléssel: $\vec{a}(a_1; a_2) \rightarrow$ pozitív irányba: $\vec{a}'(-a_2; a_1) \rightarrow$ negatív irányba: $\vec{a}''(a_2; -a_1)$

Vektorok térben:

TÉTEL:

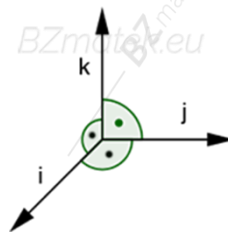
Legyen \vec{a}, \vec{b} és \vec{c} olyan nullvektortól különböző, páronként nem párhuzamos vektorok, amelyekre teljesül, hogy egyik sem illeszkedik a másik kettő által meghatározott síkra. Ekkor a tér tetszőleges \vec{v} vektora (sorrendtől eltekintve) egyértelműen előállítható az \vec{a}, \vec{b} és \vec{c} lineáris kombinációjaként, vagyis felbontható az \vec{a}, \vec{b} és \vec{c} vektorokkal párhuzamos összetevőkre. Jelöléssel: $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \tau \cdot \vec{c}$ ($\lambda, \mu, \tau \in \mathbb{R}$).

DEFINIÓ:

A nem egysíkú vektorok halmazában megadva az \vec{a}, \vec{b} és \vec{c} vektorhármast, azt mondjuk, hogy egy bázist adtunk meg. Ha $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \tau \cdot \vec{c}$, akkor a $(\lambda; \mu; \tau)$ rendezett valós számhármast az \vec{v} vektornak az \vec{a}, \vec{b} és \vec{c} bázisvektorokra (alapvektorokra) vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Jelöléssel: $\vec{c}_{(a;b;c)}$ ($\lambda; \mu; \tau$).

Megjegyzés:

- Az egysíkú vektorokkal kapcsolatos korábbi észrevételek a térben ugyanúgy alkalmazhatóak.
- A számításokban speciális \vec{i}, \vec{j} és \vec{k} alapvektorokat használunk a következő feltételekkel:
 1. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|$
 2. Az egységvektorok egymásra páronként merőlegesek: $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{i} \perp \vec{k}$.
 3. Az \vec{i}, \vec{j} és \vec{k} ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak, vagyis a \vec{k} végpontja irányából nézve az \vec{i} (+90°) - os elforgatottja a \vec{j} .
- A jobbsodrású rendszer elnevezés onnan származik, hogy a jobb kezünk hüvelyk -, mutató - és középső ujja ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot.
- Térben az egymásra páronként merőleges, jobbsodrású rendszert alkotó \vec{i}, \vec{j} és \vec{k} egységvektorok segítségével, a tér bármely \vec{v} vektora egyértelműen felbontható e vektorokkal párhuzamos összetevőkre. Jelöléssel: $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{i} + \mu \cdot \vec{j} + \tau \cdot \vec{k}$ ($\lambda, \mu, \tau \in \mathbb{R}$).

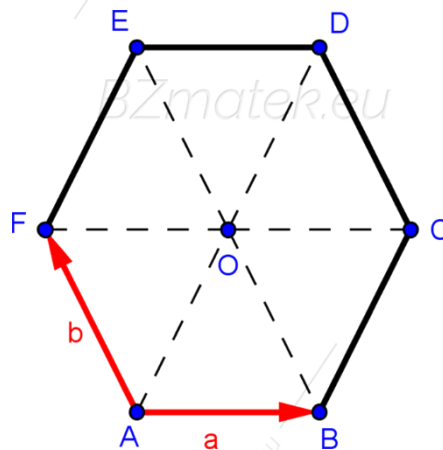


Gyakorló feladatok

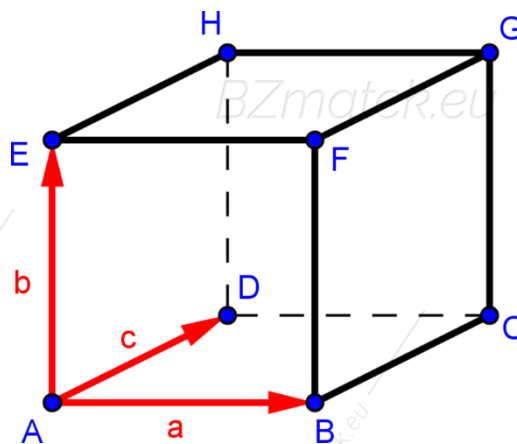
K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. (K) Tekintsük az alábbi szabályos hatszögben a következő vektorokat: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$. Add meg az \overrightarrow{FO} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{AO} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{CE} , \overrightarrow{DF} vektorok koordinátáit az $(\vec{a}; \vec{b})$ koordinátarendszerben!



2. (K) Tekintsük az alábbi kockában a következő vektorokat: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AE}$ és $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$. Fejezd ki az \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AH} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{ED} , \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{FH} , \overrightarrow{GD} vektorokat az \vec{a} és \vec{b} vektorok segítségével!



3. (K) Írd fel az $A(-2; 5)$ és $B(3; -4)$ pontokba mutató \vec{a} és \vec{b} helyvektorokat az \vec{i} és \vec{j} bázisvektorok segítségével!
4. (K) Írd fel az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{BA} vektorokat az \vec{i} és \vec{j} bázisvektorok segítségével, ha adott az $A(7; -1)$ és $B(-5; 9)$ pont!

5. (K) Adott az \vec{a} (7; -1) és \vec{b} (-13; 9) helyvektor. Határozd meg a $2\vec{a}$; $-3\vec{b}$; $5\vec{a} + \vec{b}$ és $4\vec{b} - \vec{a}$ vektorok koordinátáit az \vec{i} és \vec{j} bázisvektorok segítségével!
6. (K) Adott az \vec{a} (-4; 11) és \vec{b} (8; -7) helyvektor. Határozd meg a $3\vec{a}$; $-5\vec{b}$; $6\vec{a} + \vec{b}$ és $9\vec{b} - 2\vec{a}$ vektorok koordinátáit!
7. (K) Ábrázold a \vec{v} (-6; 4) helyvektort, számítsd ki a hosszát és bontsd fel az alábbi vektorokkal párhuzamos összetevőkre:
- a) \vec{i} (1; 0) és \vec{j} (0; 1)
- b) \vec{a} (-4; 2) és \vec{b} (1; -8)
8. (E) Ábrázold a \vec{v} (3; -4; 5) -t, számítsd ki a hosszát és bontsd fel az alábbi vektorokkal párhuzamos összetevőkre:
- a) \vec{i} (1; 0; 0), \vec{j} (0; 1; 0) és \vec{k} (0; 0; 1)
- b) \vec{a} (1; -2; 2), \vec{b} (3; -4; 1) és \vec{c} (1; -3; 2)
9. (E) Adott az \vec{a} (1; -3; 2) és a \vec{b} (6; 4; -9) vektor. Határozd meg a $2\vec{a} + \vec{b}$ és az $\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$ vektorok koordinátáit!
10. (K) Határozd meg a B és C pont koordinátáját, ha adott az A (2; 7) pont, illetve az \overline{AB} (-1; 3) és a \overline{CA} (5; -4) vektor!
11. (K) Számítsd ki az \vec{a} (-3; 4) helyvektor hosszát!
12. (K) Számítsd ki annak az \vec{a} vektornak a hosszát, amelynek kezdőpontja A (5; 7) és végpontja B (-1; -2)!
13. (K) Számítsd ki az $ABC \Delta$ területét, melynek csúcspontjai: A (1; 3), B (2; -5), C (-4; 7)!
14. (K) Adj meg három olyan vektort, amely merőleges az \vec{a} (-7; 6) vektorra!
15. (K) Adott egy paralelogramma három csúcsa: (-3; 4), (5; -2) és (6; 8). Határozd meg a paralelogramma negyedik csúcsának koordinátáit!

16. (K) Adott egy négyzet két szomszédos csúcsa: $(-1; 3)$ és $(5; -4)$. Határozd meg a négyzet hiányzó csúcsainak koordinátáit!
17. (K) Egy négyzet egyik csúcsa $A(-1; 3)$, középpontja $K(1; 4)$. Határozd meg a többi csúcs koordinátáit!
18. (K) Egy rombusz két átellenes csúcsa $A(-10; 4)$, $C(6; -8)$. Határozd meg a hiányzó két csúcs koordinátáit, ha a BD átló hossza fele az AC átlónak!
19. (K) Egy téglalap két csúcsa az $A(-2; 4)$ és $B(7; 16)$ pontok. Határozd meg a C, D csúcsok koordinátáit, ha tudjuk, hogy az AB oldal hossza háromszorosa a BC oldal hosszának!
20. (K) Legyenek A, B, C, D, E a sík tetszőleges pontjai. Határozd meg az α valós szám értékét, ha $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \alpha \cdot (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA})$!
21. (E) Az ABC háromszög AB oldalának A – hoz közelebbi negyedelőpontja N , B – hez közelebbi negyedelőpontja M . Fejezd ki a \overrightarrow{CM} – et és \overrightarrow{CN} – et \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} segítségével (a két vektor lineáris kombinációjaként)!
22. (E) Az ABC háromszögben $AB = 4, BC = 5, CA = 6$. Az A csúcsból induló belső szögfelező metsze a BC oldalt P – ben. Határozd meg az α és β értékét, ha $\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$!
23. (E) Az ABC háromszög BC oldalának C – n túli meghosszabbításán úgy vettük fel a P pontot, hogy $BP:CP = 9:5$. Bontsd fel az \overrightarrow{AP} – t \overrightarrow{AB} – ral és \overrightarrow{AC} – ral párhuzamos összetevőkre!
24. (E) Határozd meg a következő vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit!
- a) $\vec{a}(4; -3)$
- b) $\vec{b}(1; 4; 5)$
25. (K) Határozd meg az $\alpha = 120^\circ, \beta = 225^\circ$ és $\gamma = 330^\circ$ irányszögű egységvektorok koordinátáit!
26. (K) Számítsd ki az $\vec{a}(-5, -2)$ és $\vec{b}(1; 4)$ vektorok által bezárt szöget!

27. (E) Legyen O az ABC Δ köré írt kör középpontja, M a háromszög magasságpontja. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$!
28. (E) Bizonyítsd be, hogy az ABC Δ , S súlypontjából a csúcsokba vezető vektorok összege 0 !
29. (E) Legyen az ABC Δ súlypontja S , az XYZ Δ súlypontja pedig Q . Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = 3 \cdot \overrightarrow{SQ}$!
30. (E) Bizonyítsd be, hogy egy tetszőleges O pontból az ABC Δ csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő az O pontból az oldalfelező pontokba vezető vektorok összegével!
31. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ egy hatszög egymás utáni oldalfelező pontjai, akkor $\overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_3F_4} + \overrightarrow{F_5F_6} = 0$.
32. (E) Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3 \cdot \overrightarrow{AD}$, ha A, B, C, D, E, F egy szabályos hatszög csúcsai!
33. (E) Az O középpontú kör AB és CD húrja merőlegesek egymásra, egyenesaik metszéspontja M . Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$!
34. (E) Bizonyítsd be, hogy egy tetszőleges $ABCD$ négyszög középvonalainak M metszéspontjából a négyszög csúcsaiba mutató vektorok összege 0 !
35. (E) Legyen az $ABCD$ paralelogramma síkjában egy tetszőleges pont O . Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$!
36. (E) Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalának felezőpontja E és F . Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$!

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (6) Czapáry Endre; 2009.; Geometriai feladatok gyűjteménye I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (9) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (11) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (12) Saját anyagok