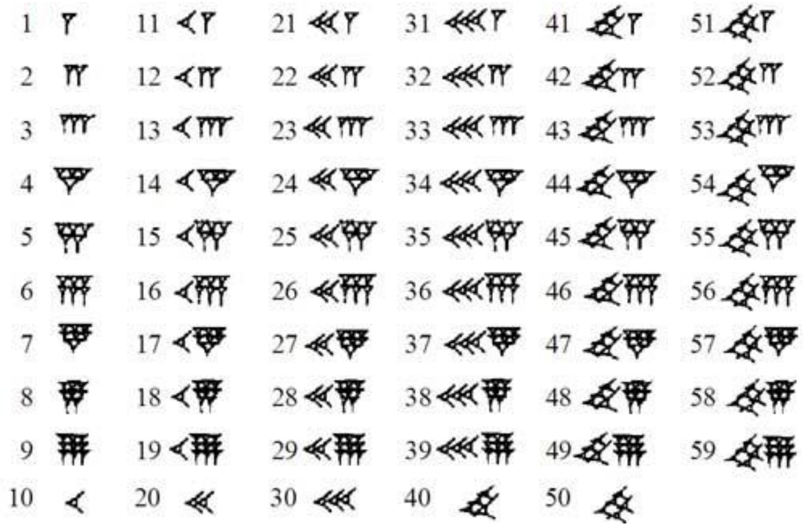
Számológép nélkül!

Manapság az iskolában a matematika órán szinte mindenhez megengedett a számológép használata. Persze mindezen a mai világban már meg se lepődünk, hiszen a mindennapi tevékenységeink nagy részében jelen vannak a „modern kor gépei”. A következőekben arra az időre szeretnék visszatekinteni, mikor még az ember eszközei kezdetlegesek voltak, illetve néhány érdekes példát szeretnék hozni arra, hogy milyen számításokat lehet elvégezni számológép nélkül.

Első körben a **római számokról** ejtenék néhány szót. Ezt mindannyian tanuljuk az iskolában, de csak az alap jelöléseket (1: I; 5: V; 10: X; 50: L; 100: C; 500: D; 1000: M). Azt, hogy ezekkel miként képzünk további számokat sokan elfelejtik, most lássunk erre egy példát: 1874 = MDCCCLXXIV, tehát balról haladunk (ezresek, százasok, tízesek, egyesek) jobb felé. Bár nagy számoknál szoktak rövidíteni, ez azonban nem megengedett, mert az I csak a V és az X előtt állhat (tehát a 999 = IM leírás nem helyes). A római számoknál továbbá használták a következő jelöléseket is: az adott érték százszorosát jelentette, ha az két függőleges vonal közé esett és ezerszeresét, ha egy vízszintes vonalat helyeztek el felé. Erre is nézzünk egy-egy példát: $|I|$ = 100; $\overline{V}$ = 5000; $\overline{|II|}$ = 200 000.

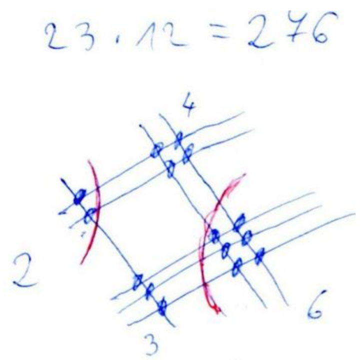
Ezután a kevésbé ismert, ám annál érdekesebb, **egyiptomi számolást** mutatnám be. Az egyiptomiaknál a számokat a következőképpen jelölték: 1-től 9-ig függőleges vonalakat húztak, míg a továbbiakra egy-egy képi szimbólumot használtak (tízesekre ∩ „halom”; százasokra: 𓍢 „zsinór”; ezresekre: 𓆼 „lótuszvirág”; tízezresekre: 𓂭 „ujj”; százezresekre: 𓆐 „ebihal”; milliókra: 𓁨 „feltartott kezű ember”). Ezekkel a jelölésekkel természetesen egy nagy szám leírása nehezebb volt, mint a rómaiaknál. Nézzünk egy példát erre is (itt szintén balról-jobbra haladunk): 231 124 = 𓆐𓆐𓂭𓂭𓂭𓆼𓍢∩∩IIII. A szorzáshoz a duplázást és összeadást vették igénybe, mellyel könnyen lehetett számolni. Tekintsük a 13*25 = 325 kifejezést, amit ők a következőképpen számoltak ki: leírták egymás mellé az 1-et és a 25-öt, majd ezek alá sorba kezdték el írni a duplájukat (tehát az 1-es alá került 2; 4; 8; ... és a 25 alá pedig 50; 100; 200; ...). Ezután megnézték, hogy a 13, az első oszlop mely számainak összegéből áll elő (13 = 1 + 4 + 8), s ennek megfelelően adták össze az ezekhez tartozó másik oszlopbeli számokat (25 + 100 + 200 = 325). A törtek közül csak a kétharmadot (𓂚) és a háromnegyedet (𓂛) jelölték el, ezenkívül csak az 1 számlálójú törteket használtak (melynél a 𓂋 jel alá írták a nevezőt). Egy egyszerű szöveges feladatot (Melyik az a szám melyhez a negyedét adva 15-öt kapunk?) a következőképpen oldottak meg: Először vettek egy olyan számot melynek a negyede könnyen kiszámítható, legyen ez most a 4. Erre a számta elvégezve a feladat szövegét 5 lesz az eredmény. Mivel a feladatban szereplő végeredmény 15 háromszorosa az általunk kapott 5-nek, így a megoldás is háromszorosa lesz a korábban választott számunknak, tehát 12 a helyes válasz.

Mezopotámiában a sumérok a babiloniai matematikát használták, melyet ékírással írtak agyagtáblákra. A legkorábbi (kb. i. e. 2500) írott matematikai emlékeink is az ókori suméroktól származnak. A számoláshoz a 60-as számrendszert használták (lásd: lenti táblázat) és tőlük ered a mai időmérés alapjai is (1 óra 60 perc). A babiloniaiak ugyanúgy helyiértékes rendszert használtak, mint manapság mi is, tehát a bal oldalon álló számok nagyobb értéket jelöltek. Az egyeseket álló ékkel , a tízeseket fekvő ékkel  szemléltették. Ezek alapján a 4995 számot a következőképpen írták le:  ($1 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60^1 + 15 \cdot 60^0$). A számításokhoz segédtáblázatokat használtak, amik különböző tulajdonság alapján tartalmazták a számokat: 1-től 59-ig a számok négyzeteit; köbszámokat; reciprokokat; négyzetgyököket; köbgyököket; szorzásokat, osztásokat. A gyökök közelítéséhez interpolációs módszert alkalmaztak, ami átlagoláson és osztáson alapult, mely elég gyors és pontos volt. Két szám szorzatát a következőképpen kapták meg: összeadták a két számot és vették annak a négyzetét, ezután kivonták az eredeti két számot és vették ennek is a négyzetét, majd a kapott négyzetszámokat kivonták egymásból, s az eredményt elosztották 4-gyel (pl.: $9 \cdot 7 = [16^2 - 2^2] : 4 = 63$) . Két szám osztását pedig a következőképpen végezték: az osztó reciprokával megszorozták az osztandót (pl.: $12 : 3 = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$).

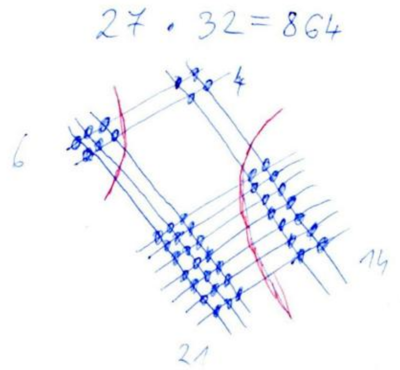


A **görögöknél** a matematika tudománya jóval kifinomultabb volt, mint a korábbi kultúráknál. A számokat érdekes tulajdonságok alapján különböztették meg. Azokat a számokat nevezték párosnak, melyek szemléltetéséhez egyenlő számú fehér és fekete színű kavicsot használtak. Egyenes számoknak nevezték azokat, melyeket nem lehetett kavicsokkal téglalap alakba kirakni, csak egy sorban (pl.: 2, 3, 5; ...). Síkszámoknak nevezték ezáltal azokat, melyek két szám szorzatára bonthatóak, s így egy téglalappal szemléltethetőek (pl.: $6 = 3 \cdot 2$), s ennek voltak speciális esetei a négyzetszámok, melyek egyenlő tényezőkre bonthatóak (pl.: $16 = 4 \cdot 4$). Ezek alapján pedig testszámoknak nevezték azokat, melyek három tényező szorzataként is előállnak, s így egy térbeli téglatestként szemléltethetőek (pl.: $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$), s az előzhöz hasonlóan itt a speciális eseteket köbszámoknak nevezték. Az előzőekhez hasonlóan képeztek úgynevezett háromszögszámokat is (pl.: 3; 6; 10; …), melyek a kavicsokkal háromszög alakban szemléltethetőek. Tökéletes számoknak nevezték azokat, melyek osztóinak összege éppen a szám kétszerese (pl.: 28: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$). Ezek alapján megkülönböztettek bővelkedő és szűkölködő számokat is: az első esetben a szám osztóinak összege nagyobb, mint a szám kétszerese, míg a második esetben kisebb. Két számot pedig barátságosnak neveztek, ha az egyik szám önmagánál kisebb osztóinak összege egyenlő a másik számmal és viszont (pl.: 220 és 284). Végezetül prímszámoknak (törzsszámoknak) nevezték azokat a számokat, melyeknek pontosan kettő osztója van, 1 és önmaga (pl.: 2; 3; 5; …), s ezen belül ikerprímeket is tekintettek: azok a prímek, melyek különbsége pontosan kettő (pl.: 11 és 13).

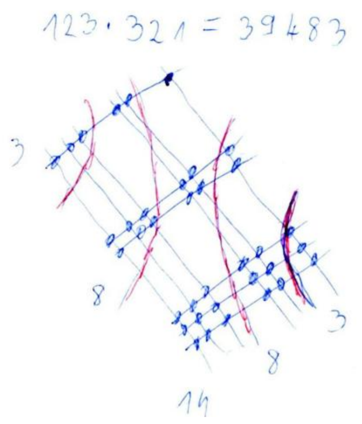
A **kínaiaknál** ismert a szorzásra egy érdekes eljárás. A két számot melyet összeszorzunk egyenesekkel szemléltetjük, majd a megoldásokat az egyenesek metszéspontjai fogják megadni. Amennyiben két kétjegyű számot szorzunk össze, akkor a metszéspontokat kettő vonallal 3 részre bonthatjuk, ahol minden részben megnézzük a pontok számát. A középső halmazba a metszéspontoknak két csoportja tartozik, melyek számát össze kell adnunk. A megoldást úgy kapjuk, hogy a különböző részek pontjainak számát egymás mellé sorban leírjuk.

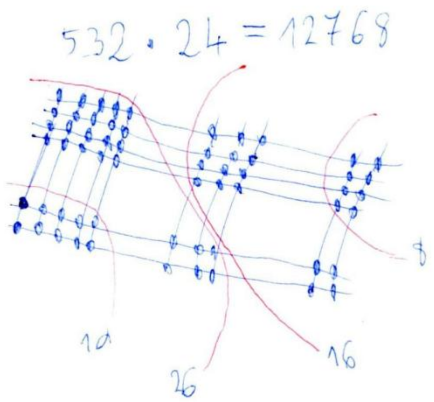


A helyzetet bonyolítja, ha a részekhez tartozó pontok összege kétjegyű szám. Ebben az esetben nem írhatjuk le az előző módszerrel, mert akkor nem megfelelő megoldást kapnánk. Ilyenkor hátulról tekintve a számokat, amennyiben kétjegyű számmal dolgozunk, úgy az első számjegyét hozzáadjuk a következő számhoz (ábrán: 14 -> 4; 1 + 25 = 26 - > 6; 2 + 6 = 8).

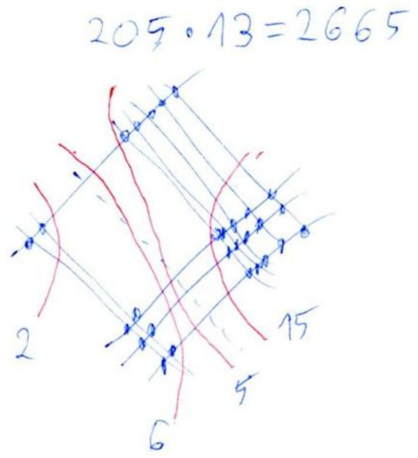


Ezután tekintsük azt az esetet amikor két háromjegyű számot szorzunk össze. A metszéspontokat négy vonallal 5 részre osztjuk: a második és negyedik részbe a pontok két csoportja, míg a középső részbe a pontok három csoportja tartozik. Amennyiben pedig egy kétjegyű és egy háromjegyű számot szeretnénk összeszorozni, akkor szintén négy vonalat használunk, de csak 4 részre bontjuk a metszéspontokat (középső rész hiányzik). A részekhez tartozó pontok számának lejegyzetelése után hasonlóan járunk el, mint fentebb (ábrán: 8; 16 -> 6; 1 + 26 = 27 -> 7; 2 + 10 = 12).

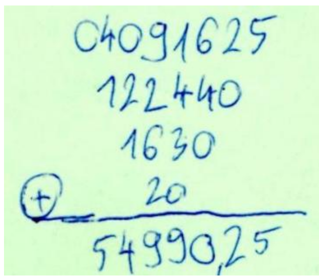




Végezetül nézzük meg miként alakítja a számolást, amikor valamelyik szám számjegyei között szerepel a 0. Ekkor ezt a számjegyet egy szaggatott vonallal jelöljük az ábrán, majd behúzzuk az egyes részeket határoló vonalakat az előzőekhez hasonlóan. A metszéspontok összeszámlálásánál pedig ügyelünk arra, hogy a szaggatott vonal által meghatározott metszéspontokat nem tekintjük (nullaként számoljuk).



Ezek után nézzük meg miként lehet kiszámítani egy számnak a **négyzetét** számológép nélkül. Legyen az a feladat, hogy számoljuk ki 234,5-nek a négyzetét. Első lépésben minden számjegynek vesszük a négyzetét és kettes csoportban leírjuk őket egymás mellé (04091625). Ezután alá írjuk egy jeggyel balra tolva a következőt: az első számot megszorozzuk a mögötte állóval és még kettővel, s ezt folytatjuk végig (122440). Következő lépésben az első számot a kettővel mögötte levővel és még kettővel szorozzuk meg, majd ezt is beljebb tolva írjuk alá (1630). Végezetül az első számot a hárommal mögötte levővel szorozzuk meg és még kettővel, majd ismét alá írjuk az előzőeknek (20). Amennyiben végeztünk ezekkel a számításokkal már csak össze kell adnunk a fentebb egymás alá lejegyzett számokat , s az eredménynél kétszer annyi tizedesjegyet jelölünk meg, mint amennyi az eredeti számnál volt (tehát 234,5 · 234,5 = 54990,25).



Hasonló eljárást lehet **négyzetgyökvonásra** is alkalmazni, azonban a hosszúsága miatt, most csak egy érdekességre szeretnék rámutatni ezzel kapcsolatban. Amennyiben 25-re végződik egy szám és az előtte álló számjegyekből álló szám felírható két egymást követő szám szorzataként, úgy a megoldás könnyen előáll. Lássunk erre is példát: Mennyi 4225 és 20,25 négyzetgyöke? Mivel 42 = 6 · 7, ezért $\sqrt{4225}$ = 65 és 20 = 4 · 5, így $\sqrt{20{,}25}$ = 4,5.

Bár mindezekre ma már nincs szüksége az embernek, azért furcsa belegondolni, hogy az ókori Babilonban a 60-as számrendszert (60-szor 60-as szorzótáblát) használták, manapság pedig sajnos a 10-szer 10-es is sokaknak problémát jelent. Remélem, azért így is sikerült néhány érdekességgel megismertetnem az olvasókat és ahogy mondani szokás: ki tudja, egyszer még talán jól jöhet mindezek ismerete is.

Brósch Zoltán