Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Ha egy minta átlaga A, s a minta összes adatához hozzáadunk egy k számot, akkor az így előálló adathalmaz számtani közepe: $A + k$.

Bizonyítás:
Tekintsük a következő mintát: $x_1; x_2; \dots; x_n$.

Ekkor a minta átlaga: $A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Tekintsük a következő adathalmazt: $x_1 + k; x_2 + k; \dots; x_n + k$.

Ez utóbbi adathalmaznak az átlaga: $A' = \frac{x_1 + k + x_2 + k + \dots + x_n + k}{n}$.

Ebből alakítás után adódik a tétel:

$$A' = \frac{x_1 + k + x_2 + k + \dots + x_n + k}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + n \cdot k}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{n \cdot k}{n} = A + k.$$

■

TÉTEL:
Ha egy minta átlaga A, s a minta összes adatát egy k számmal megszorozzuk, akkor az így előálló adathalmaz számtani közepe: $k \cdot A$.

Bizonyítás:
Tekintsük a következő mintát: $x_1; x_2; \dots; x_n$.

Ekkor a minta átlaga: $A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Tekintsük a következő adathalmazt: $k \cdot x_1; k \cdot x_2; \dots; k \cdot x_n$.

Ez utóbbi adathalmaznak az átlaga: $A' = \frac{k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + \dots + k \cdot x_n}{n}$.

Ebből alakítás után adódik a tétel:

$$A' = \frac{k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + \dots + k \cdot x_n}{n} = \frac{k \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} = k \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = k \cdot A.$$

■

TÉTEL:
n darab pozitív szám esetén igaz a következő összefüggés: $H \leq G \leq A \leq N$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha minden szám egyenlő.

Bizonyítás:
Írjuk fel az a és b számokra a nevezetes közepeket: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Tekintsük először a harmonikus - és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad \rightarrow \quad 4a^2b^2 \leq ab \cdot (a+b)^2 \quad \rightarrow \quad 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Tekintsük most a mértani - és számtani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \rightarrow \quad 4ab \leq (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Végül tekintsük a számtani - és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Mivel két szám különbségének négyzete egy nem negatív szám, így mind a három esetben teljesülnek az egyenlőtlenségek.

Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn az egyes esetekben, ha a két szám különbsége 0, vagyis a két szám egyenlő egymással.

■