Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL: (Képzési szabály)
Ha egy számtani sorozat első tagja a_1, differenciája d, akkor n – edik tagja megkapható a következő összefüggés segítségével: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Bizonyítás:
Az állítást teljes indukcióval látjuk be:

- $n = 1$ – re az állítás teljesül: $a_1 = a_1 + (1-1) \cdot d = a_1$.
- Tegyük fel, hogy $n = k$ – ra igaz az állítás, vagyis $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$.
- Megmutatjuk, hogy ekkor $n = k+1$ – re is teljesül az állítás, vagyis $a_{k+1} = a_1 + k \cdot d$.

  Használjuk a számtani sorozat definícióját és az indukciós feltevést:

  $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1) \cdot d + d = a_1 + k \cdot d$.

Ezek alapján minden n – re teljesül a bizonyítandó állítás.

■

TÉTEL:
A számtani sorozat bármelyik tagja (a másodiktól kezdve) egyenlő a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepével. Jelölés: $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$.

Bizonyítás:
Írjuk fel az a_{n-k} és a_{n+k} tagokat a következőképpen:

$a_{n-k} = a_1 + (n-k-1) \cdot d$

$a_{n+k} = a_1 + (n+k-1) \cdot d$

Tekintsük a két tag számtani közepét, s megfelelő átalakításokkal adódik a bizonyítandó állítás:

$$\frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = \frac{a_1 + (n-k-1) \cdot d + a_1 + (n+k-1) \cdot d}{2} = \frac{2 \cdot a_1 + 2 \cdot n \cdot d - 2 \cdot d}{2} = a_1 + n \cdot d - d =$$

$$= a_1 + (n-1) \cdot d = a_n$$

■

TÉTEL:
Egy (a_n) számtani sorozat első n tagjának összege: $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2} \cdot n$.

Bizonyítás:
Írjuk fel az első n tag összegét kétféleképpen: az első, illetve az n – edik tagból kiindulva.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

Írjuk fel a tagok az első egyenletben a_1 és d, a másodikban pedig a_n és d segítségével:

$$S_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \cdots + a_1 + (n-3)\cdot d + a_1 + (n-2)\cdot d + a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$S_n = a_n + a_n - d + a_n - 2d + \cdots + a_n - (n-3)d + a_n - (n-2)\cdot d + a_n - (n-1)\cdot d$$

A két egyenletet egyenletrendszerként tekintve, az első egyenlethez adjuk hozzá a másodikat:

$$2\cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Mivel az egyenlet jobb oldalán n tag szerepel, így átrendezéssel adódik a bizonyítandó állítás:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Az $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ behelyettesítésével adódik a második képlet is:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{a_1+a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n = \frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n.$$

■