Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Szorzat n – edik gyöke a tényezők n – edik gyökének szorzatával egyenlő. Jelöléssel: $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$, ahol $x; y \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}^+$.

Bizonyítás:
Amennyiben két nem negatív kifejezés ugyanannyiadik pozitív egész kitevőjű hatványa egyenlő, akkor a kifejezések is egyenlők.

$$\left(\sqrt[n]{x \cdot y}\right)^n = x \cdot y \qquad \left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = x \cdot y \qquad \rightarrow \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

■

TÉTEL:
Hányados n – edik gyöke egyenlő a számláló n – edik gyökének és a nevező n – edik gyökének a hányadosával. Jelöléssel: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$; ahol $x \geq 0; y > 0$ és $n \in \mathbb{N}^+$.

Bizonyítás:
Amennyiben két nem negatív kifejezés ugyanannyiadik pozitív egész kitevőjű hatványa egyenlő, akkor a kifejezések is egyenlők.

$$\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\right)^n = \frac{x}{y} \qquad \left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{y}\right)^n} = \frac{x}{y} \qquad \rightarrow \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

■

TÉTEL:
Egy valós szám n – edik gyökének m – edik hatványa egyenlő a szám m – edik hatványának n – edik gyökével. Jelölés: $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$; ahol $x > 0$ és $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}^+$.

Bizonyítás:

$$\sqrt[n]{x^m} = \underbrace{\sqrt[n]{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}}_{m\ darab} = \underbrace{\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x}}_{m\ darab} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \qquad \rightarrow \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

■

TÉTEL:
Egy valós szám m – edik gyökének n – edik gyöke egyenlő a szám $n \cdot m$ – edik gyökével. Jelöléssel: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$; ahol $x \geq 0$ és $m; n \in \mathbb{N}^+$.

<u>Bizonyítás:</u>
Amennyiben két nem negatív kifejezés ugyanannyiadik pozitív egész kitevőjű hatványa egyenlő, akkor a kifejezések is egyenlők.

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\right)^{n \cdot m} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\right)^{n}\right]^{m} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^{m} = x \qquad \left(\sqrt[n \cdot m]{x}\right)^{n \cdot m} = x \quad \rightarrow \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$$

■

TÉTEL:
Egy valós szám m – edik hatványának n – edik gyöke egyenlő a szám $m \cdot k$ – adik hatványának $n \cdot k$ – adik gyökével. Jelöléssel: $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}}$; ahol $x \geq 0$ és $m; n \in \mathbb{N}^+$.

<u>Bizonyítás:</u>
Amennyiben két nem negatív kifejezés ugyanannyiadik pozitív egész kitevőjű hatványa egyenlő, akkor a kifejezések is egyenlők.

$$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^{n} = x^m \quad \left(\sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}}\right)^{n} = \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{x^{m \cdot k}}}\right)^{n} = \left(\sqrt[k]{x^m}\right)^{k} = x^m \quad \rightarrow \quad \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}}$$

■