Mennyi a vége?

Érdekes feladat meghatározni azt, hogy egy szorzás vagy hatványozás esetén, legyen bármilyen nagy számokról is szó, miként tudjuk eldönteni, hogy mi lesz az eredmény utolsó számjegye. A következőekben azt szeretném megmutatni, hogy amennyiben a számológép már nem tud ebben segítségünkre lenni, mert a szorzat értéke túl nagy, akkor mi mégis miként tudunk könnyedén megoldani egy ilyen problémát.

Tekintsük először a szorzást. Legyen a szorzat két száma P és Q. A számok felírhatóak a következő alakokban is: $\boldsymbol{P = 10 \cdot A + B;\ Q = 10 \cdot X + Y,}$ ahol B és Y az eredeti számok utolsó számjegyeit jelölik, míg az A és X az utolsó számjegyek elhagyásával keletkező számokat. Végezzük el a szorzást:

$$\boldsymbol{P \cdot Q = (10 \cdot A + B) \cdot (10 \cdot X + Y) = 100 \cdot A \cdot X + 10 \cdot A \cdot Y + 10 \cdot B \cdot X + B \cdot Y}$$

Ekkor látható, hogy a végeredmény egy olyan négytagú összeg, melynek első három tagja biztosan 0 - ra végződik (a 10 - zel és 100 - zal való szorzás miatt). Így tehát az összeg utolsó számjegye a negyedik tag utolsó számjegyével fog megegyezni, ami éppen az eredeti számok utolsó számjegyeinek a szorzata ($B \cdot Y$).

Példa: Mennyi az $1234567 \cdot 9394959$ szorzat értékének utolsó számjegye?

Megoldás: $7 \cdot 9 = 63$, tehát 3 lesz az utolsó számjegy.

Természetesen ez kiterjeszthető többtagú szorzásra is. A szorzat utolsó számjegye mindig a szorzótényezők utolsó számjegyének szorzatától fog függni.

Példa: Mennyi az $1234 \cdot 4567 \cdot 7891 \cdot 2468 \cdot 13579$ szorzat értékének utolsó számjegye?

Megoldás: $4 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9 = 2016$, tehát 6 lesz az utolsó számjegy. Amennyiben még így is túl nagy szám jönne ki, akkor másképpen is eljárhatunk. Szorozzuk össze az első két szám utolsó számjegyét, majd az így kapott szám utolsó számjegyét szorozzuk meg a harmadik számunk utolsó számjegyével. Ezt tovább folytatjuk, míg a végére nem érünk:

$$4 \cdot 7 = 28 \quad -> \quad 8 \cdot 1 = 8 \quad -> \quad 8 \cdot 8 = 64 \quad -> \quad 4 \cdot 9 = 36.$$

Tekintsük most a hatványozást. A hatványozás során egy számot szorzunk meg önmagával, így tehát az eljárás hasonló lesz. Első lépésben meg kell néznünk, hogy az utolsó számjegy hatványai milyen számokra végződnek. Amennyiben az utolsó számjegy:

- $\mathbf{0}$, akkor 0^1 = $\mathbf{0}$; 0^2 = $\mathbf{0}$; …
- $\mathbf{1}$, akkor 1^1 = $\mathbf{1}$; 1^2 = $\mathbf{1}$; …
- $\mathbf{2}$, akkor 2^1 = $\mathbf{2}$; 2^2 = $\mathbf{4}$; 2^3 = $\mathbf{8}$; 2^4 = 16 -> $\mathbf{6}$; 2^5 = 32 -> $\mathbf{2}$; …
- $\mathbf{3}$, akkor 3^1 = $\mathbf{3}$; 3^2 = $\mathbf{9}$; 3^3 = 27 -> $\mathbf{7}$; 3^4 = 81 -> $\mathbf{1}$; 3^5 = 243 -> $\mathbf{3}$; …
- $\mathbf{4}$, akkor 4^1 = $\mathbf{4}$; 4^2 = 16 -> $\mathbf{6}$; 4^3 = 64 -> $\mathbf{4}$; …
- $\mathbf{5}$, akkor 5^1 = $\mathbf{5}$; 5^2 = 25 -> $\mathbf{5}$; …
- $\mathbf{6}$, akkor 6^1 = $\mathbf{6}$; 6^2 = 36 -> $\mathbf{6}$; …
- $\mathbf{7}$, akkor 7^1 = $\mathbf{7}$; 7^2 = 49 -> $\mathbf{9}$; 7^3 = 343 -> $\mathbf{3}$; 7^4 = 2401 -> $\mathbf{1}$; 7^5 = 16807 -> $\mathbf{7}$; …
- $\mathbf{8}$, akkor 8^1 = $\mathbf{8}$; 8^2 = 64 -> $\mathbf{4}$; 8^3 = 512 -> $\mathbf{2}$; 8^4 = 4096 -> $\mathbf{6}$; 8^5 = 32768 -> $\mathbf{8}$; …
- $\mathbf{9}$, akkor 9^1 = $\mathbf{9}$; 9^2 = 81 -> $\mathbf{1}$; 9^3 = 729 -> $\mathbf{9}$; …

Látható, hogy az utolsó számjegyek egy bizonyos hatványtól mindig ismétlődni fognak az adott sorrendben.

Miután az (egymástól különböző) utolsó számjegyeket felírtuk, a következő lépés az, hogy a hatványt elosztjuk a számjegyek számával. Ezt követően az osztás során keletkező maradék fogja megmutatni, hogy mi lesz a hatványozás eredményének utolsó számjegye. Végül, a sorba leírt utolsó számjegyek közül azt kell tekintenünk, amely a maradék által megadott helyen található (0 maradék esetén az utolsó szám a sorban).

Példa: Mennyi a 2007^{1854}-en értékének utolsó számjegye?

Megoldás: 2007 utolsó számjegye a 7-es. A 7 hatványainak utolsó számjegyei sorrendben: *7; 9; 3; 1; 7; …* Látható, hogy négy különböző számjegy lehetséges, ezért a hatványt néggyel kell elosztanunk. *1855 : 4 = 463*, maradék 2. Ezek alapján, az utolsó számjegyek sorában a második szám lesz a megoldás. A számunk tehát *9* - esre fog végződni.

Példa: Mennyi az 1993^{2000}-en értékének utolsó számjegye?

Megoldás: Az 1993 utolsó számjegye 3. Tekintsük 3 hatványainak utolsó számjegyeit sorrendben: *3; 9; 7; 1; 3; …* Látható, hogy négy különböző számjegy lehetséges, ezért a hatványt néggyel kell elosztanunk. *2000 : 4 = 500*, maradék 0. Ezek alapján, az utolsó számjegyek sorában a negyedik szám lesz a megoldás. A számunk tehát *1* - esre fog végződni.

Brósch Zoltán