# Matematikai paradoxonok
# (Aki tudja, hogy nem tud semmit, az mindent tud)

A paradoxon alatt olyan állításokat értünk, amelyek ellentmondásra vezetnek, illetve a józanésznek ellentmondó következtetések vonhatóak le belőle. A következőekben ilyen kijelentéseket fogunk látni, illetve olyan szituációkról, feladatokról lesz szó, amelyeknél első ránézésre azt mondanánk, hogy az esélyek ugyanakkorák a különböző kimeneteleknél. Rövid számítások után azonban mégis az adódik, hogy az esélyek változnak és mégse olyan bonyolult az adott kérdés megoldása, mint azt elsőre gondolnánk.

## Születésnap paradoxon:

Ez a jelenség a következőt takarja: elég nagy a valószínűsége annak, hogy viszonylag sok, egy szobában tartózkodó személy közül kettőt találomra kiválasztva, születésnapjuk azonos napra essen. A számítások alapján már 23 ember esetén is több, mint 50 % az esély erre, illetve ha 58 személyt vizsgálunk, akkor a valószínűsége több, mint 99 % (72 ember esetén pedig már 99,9 %). Ez abban az értelemben paradoxon, hogy ellentmond az intuíció által sugalltaknak, a legtöbb ember ugyanis 50 % - nál lényegesen alacsonyabbra gondolja a fenti esemény valószínűségét.

A valószínűség közelítő kiszámításához most nem tekintjük a szökőéveket és azt, hogy az emberek között lehetnének ikrek is. Ezek helyett azonban feltesszük, hogy ha valakinek nem ismerjük a születésnapját, akkor az a 365 napos év minden napján azonos valószínűséggel születhetett. A paradoxon megértését megkönnyíti, ha észrevesszük, hogy kevés ember esetén is sok pár van, akiknél a születésnap egyezését vizsgálnunk kell. Például 23 ember esetén $\frac{23 \cdot 22}{2}$ = 253 pár van, mindegyik pár egy lehetséges egyezés, továbbá a hármas, négyes és többes egybeeséseket is vizsgálnunk kell.

Először számoljuk ki, hogy mi a valószínűsége annak, hogy n emberből mindenki más napon született. A kedvező esetek száma ekkor 364 · 363 · … · [365 – (n – 1)], mert ha sorba állítjuk az embereket, akkor a másodiknak nem lehet ugyanakkor a születésnapja, mint az elsőnek, a harmadiknak nem lehet ugyanakkor, mint az első kettőnek, és így tovább. Az összes lehetséges esetek száma pedig $365^n$. Ezek alapján a valószínűség: P(A) = $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365} = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$. Mivel most az eredeti kérdés ellentettjének számítottuk ki az esélyét, így ebből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább két embernek egy napra esik a születésnapja: 1 – P(A), vagyis n = 23 esetén ez az érték 0,507.

Vegyük észre, hogy a két embert nem választottuk ki elsőre. Ha az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel van n emberből legalább egynek ugyanakkor a születésnapja, mint egy konkrét embernek, akkor a megfelelő képlet: P(B) = 1 - $\left(\frac{364}{365}\right)^n$. Ahhoz, hogy ennek a valószínűsége legyen több, mint 50 %, nem 22, hanem 253 emberre lenne szükség. Más szemszögből megközelítve a kérdést: sokkal kisebb 50 % - nál az esély arra, hogy miután belépünk egy szobába, ahol már 22 - en vannak, a bent tartózkodók közül valakinek ugyanakkor legyen a születésnapja, mint nekünk. A születésnap-paradoxon azonban azt kérdezi, hogy bármelyik két embernek a 23 - ból megegyezik - e a születésnapja.

Végül nézzünk egy érdekes példát: Az Amerikai Egyesült Államoknak 1930 - ig 30 elnöke volt. Annak az esélye, hogy ketten közülük egy napon születtek 70,6 %, s valóban találunk egyezést: Polk és Harding november 2. - án született. Ehhez hasonlóan, ha a halálozást vizsgáljuk, akkor azt kapjuk, hogy 1960-ig 30 elnök halt meg, így az esély szintén 70,6 %, s itt is találunk azonos dátumokat: Jefferson, Adams és Monroe július 4. - én, míg Fillmore és Taft március 8. - án halt meg.

Monty Hall paradoxon:

A Monty Hall-paradoxon egy, az Amerikai Egyesült Államokban futott Kössünk üzletet című televíziós vetélkedő utolsó feladatán alapul. A műsor végén a játékosnak mutatnak három csukott ajtót, amelyek közül kettő mögött egy - egy kecske van, a harmadik mögött viszont egy autó. A játékos nyereménye az, ami az általa kiválasztott ajtó mögött van. A választás során a játékos először csak rámutat az egyik ajtóra, de mielőtt azt kinyitná, a műsorvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, amelyik mögött nem az autó van (a játékvezető tudja, melyik ajtó mögött mi található), majd megkérdezi a játékost, hogy akar - e módosítani a választásán. A játékos ezután vagy változtat, vagy nem, végül kinyílik az így kiválasztott ajtó, mögötte a nyereménnyel. A paradoxon kérdése az, hogy érdemes - e változtatni az egyik ajtó kinyitása után, illetve hogy számít - e az esélyek szempontjából, hogy a két zárt ajtó közül melyiket választjuk végül. Egyszerű számolás után megmutatható, hogy mindig érdemes váltanunk. Ez azonban ellentmond a józan ész logikájának, mert a legtöbb ember azt mondaná, hogy mindegy, váltunk - e vagy sem, mert 50 – 50 % az esélye, hogy az autót nyerjük, akármelyiket is választom a megmaradó két zárt ajtó közül. Látszólag az, hogy a korábbi döntést figyelmen kívül hagyva választok egy ajtót, illetve az, hogy az előző választásomat módosíthatom, nem befolyásol semmit.

A helyes válasz azonban mégis az, hogy érdemes váltanunk, s az esélyeink az autó megnyerésére megduplázódnak, ha váltunk. Amikor a játékos először kiválaszt egy ajtót, annak az esélye, hogy az autót választotta $\frac{1}{3}$, míg a kecske választására $\frac{2}{3}$. Az, hogy a műsorvezető ezek után kinyitja a másik két ajtó egyikét, megmutatva így egy kecskét, nem változtat ezeken a valószínűségeken, továbbra is $\frac{1}{3}$ az esélye, hogy az elsőre választott ajtó mögött van az autó. Azonban annak a valószínűsége, hogy az autó valamelyik csukott ajtó mögött van, még mindig 100 %, ezért $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a másik ajtó mögött lesz a kocsi.

Közelítsük meg más szemszögből a kérdést. A cserével csak akkor nyerünk, ha elsőre nem az autót választottuk ki. Mivel eredetileg $\frac{2}{3}$ esélyünk van kecskét választani, a váltással $\frac{2}{3}$ eséllyel nyerünk. Továbbá az is egy lehetőség, hogy felírjuk az összes esetet.

| **1. ajtó** | **2. ajtó** | **3. ajtó** | **Monty kinyitja** | **Ha váltunk** |
|---|---|---|---|---|
| kecske | kecske | autó | a 2. ajtót | nyerünk |
| kecske | autó | kecske | a 3. ajtót | nyerünk |
| autó | kecske | kecske | a 2. vagy a 3. ajtót | vesztünk |

Tegyük fel, hogy a játékos mindig az 1. ajtót választja (a választás nem befolyásolja az esélyeket, mert a 2. vagy 3. ajtó választásánál is pontosan ugyanezeket az eredményeket kapnánk). Látható, hogy a 3 esetből kétszer nyerünk, pontosan akkor, amikor váltunk.

Könnyebben látható az esélyek növekedése, ha 100 ajtóval nézzük a szituációt. Továbbra is egy mögött van autó, de most 99 mögött van kecske. Az első választáskor 100 esetből 99 - szer kecskét választunk, és csak 1 - szer autót. Ha ezután 98 kecskét rejtő ajtót kinyitunk, 100 esetből 99 - szer az egyetlen másik csukva hagyott mögött van az autó, és csak 1 esetben van mögötte kecske. Nyilvánvaló tehát, hogy érdemes váltani.

A játéknak további változataira is ismertek stratégiák. Tekintsük először a következő esetet: ugyanúgy három ajtó van, egy autó, két kecske, de ezúttal két játékos választ egy - egy ajtót (de nem ugyanazt). A következő lépésben az egyik játékos, aki kecskét választott, kiesik, kinyitja az általa választott ajtót, majd feltesszük a bent maradó játékosnak a szokásos kérdést (ha mindkét játékos kecskét választott, véletlenszerűen döntjük el, hogy ki fejezi be a játékot). A kérdés ezután ugyanaz: érdemes - e a bennmaradt játékosnak váltania? A helyes válasz ezúttal azonban az, hogy nem. A bennmaradt játékos ugyanis a váltással csak akkor nyerhet, ha az elsőre választott két ajtó egyike mögött sem volt autó. Mivel ennek $\frac{1}{3}$ az esélye, ezért ha marad, akkor $\frac{2}{3}$ eséllyel nyeri meg az autót.

Végül nézzünk egy újabb szabályt: Tegyük fel, hogy most $n$ darab ajtónk van. Az első lépésben kiválasztunk egyet, majd megmutatnak egy másikat, amelyik mögött kecske van. Ezután ha akarunk, válthatunk, vagy maradhatunk ugyanott. Ezt követően újabb ajtót nyitnak ki, majd ismét válthatunk, és így tovább, amíg végül már csak két csukott ajtó van, az, amelyiket legutóbb választottuk, és még egy. A kérdés az, hogy milyen váltási stratégiát érdemes követnünk, hányszor és mikor érdemes váltanunk? A helyes válasz ezúttal az, hogy maradjunk az első döntésünknél egészen a végéig, amikor már csak két ajtó van, és akkor váltsunk, mert ilyenkor a nyerés valószínűsége P(A) = $\frac{n-1}{n}$.

Hazugság paradoxon:

Ebben az esetben olyan kijelentő mondatokról van szó, amelyekről nem dönthető el egyértelműen, hogy igazak - e vagy sem. Például: „Most hazudok.”; „Ez a mondat hamis.”; „Valaki azt mondja magáról, hogy hazudik. Igaz amit mond, vagy hazudik?” (Cicero)

Az előzőekhez hasonló a „Minden krétai hazudik.”, melyet a krétai Epimenidész jelentette ki, ezért Epimenidész-paradoxonnak is szokás nevezni. Vizsgáljuk meg ezt a kijelentést a valóság tartalma szempontjából. Amennyiben Epimenidész igazat mond, akkor ellentmondásba kerül, mert a mondata szerint neki is hazudnia kellene. Amennyiben hazudik, úgy az állítás szerint viszont, mivel akkor minden krétai igazat mond, neki is igazat kellene szólnia, de így ez sem lehetséges. Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk. Az ellentmondást azonban feloldhatjuk, mert az eredeti állítás pontos tagadása a következő: „Van olyan krétai, aki nem hazudik.” Ezek szerint, ha Epimenidész hazudott, akkor kétféle krétai létezik: aki igazat szól és aki nem, s ő is ez utóbbiak közé tartozik. Ezek alapján a paradoxon csak akkor áll ténylegesen elő, ha az egyetlen krétai maga Epimenidész lett volna.

Statisztikai paradoxonok:

Sokszor előfordul, hogy hamis összefüggések alapján rossz következtetésekre jutunk. Megfigyelhető például, hogy minél több templom van egy városban, annál több bűnesetet követnek el a lakosok. A valóságban mindkettő a nagyobb lélekszám következménye. Egy másik példa: Egyszer kimutatták, hogy a doktori fokozattal rendelkező közgazdászok fizetése alacsonyabb az „egyszerű” diplomás közgazdászokénál. A különbség oka valójában az volt, hogy a doktori fokozattal rendelkezők többnyire tudományos pályát választottak, ahol a fizetések általában alacsonyabbak az iparban fizetetteknél.

Homok kupac paradoxon:

Képzeljünk el egy kupac homokot. Vegyünk el egyetlen homokszemet a kupacból, de ekkor az egyetlen szem homok hiánya nem vehető észre, így továbbra is homokkupacot kapunk. Ismételjük meg a műveletet még néhányszor. Az eredmény változatlan. Ezek alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy egy homokszem a nullával volna egyenértékű. Sőt az is nyilvánvaló, hogy az előbbi műveletet véges sokszor megismételve a homokkupacot teljesen eltüntethetjük, azaz nullát kaphatunk. Ezek alapján minden két esetben ellentmondáshoz jutunk. Az ellentmondás azonban abból következik, hogy nincs előre meghatározva, mit tekintsünk pontosan homok kupacnak.

Grand Hotel paradoxon:

Ennél a paradoxonnál az alapprobléma a következő: Képzeljünk el egy olyan szállodát, ahol végtelen sok szoba van, azaz a szobaszámok 1 - től kezdve folyamatosan növekednek. Tegyük fel, hogy egy napon az összes szoba megtelt, annyi vendég érkezett. A kérdés az, ha jön még egy vendég, el kell - e küldenünk? A helyes válasz az, hogy nem, mert ha a portás a hangosbemondó-rendszeren keresztül megkéri a többi vendéget, hogy költözzenek át az eggyel nagyobb számú szobába, akkor az 1 - es szoba felszabadul.

Ezek után további problémákat is tekinthetünk: Tegyük fel, hogy érkezik egy olyan autóbusz, amelynek a szállodához hasonlóan végtelen sok ülése van és a busz is tele van. El lehet - e helyezni a most érkező végtelen sok vendéget a már megtelt szállodában? A helyes válasz itt is az, hogy igen. A portásnak ezúttal azt kell bemondania, hogy minden eddigi vendég költözzön át a jelenlegi szobaszámának kétszeresét viselő szobába. Ezzel a lépéssel az összes páratlan számú szoba felszabadul, így ezekbe könnyedén beköltözhetnek a busz utasai, az 1 - es ülésen ülő az 1 - es szobába, a 2 – es ülésen ülő a 3 - asba, és így tovább.

Tekintsük most a következő szituációt: A nap folyamán végtelen sok végtelen kapacitású busz érkezik, s ezen vendégeket kellene elszállásolni a már megtelt szállodában. A kérdés az, hogy ezúttal is megoldható – e a feladat? A helyes válasz most is az, hogy igen. A portásnak azt kell bemondania, mint az előző esetben, majd az első busz utasait a $3^n$ számú szobákba költözteti (ahol n az ülés száma), a második busz utasait az $5^n$ számú szobákba, a harmadik busz utasait a $7^n$ számúakba, és így tovább (az $i$ - edik busz utasait a ${p_i}^n$ számúba, ahol $p_i$ az $i + 1$ - edik prímszám). Mivel a prímszámok hatványai páratlanok és különböző prímszámok hatványai mindig különbözőek, így a már bentlakó vendégekkel és a most beköltöző vendégekkel sem lesz ütközés. Ráadásul még maradnak üres szobák is.

Végül nézzünk még egy szituációt: A portást nap folyamán felhívják, hogy az éjszaka közepén egy busszal véges sok vendég fog érkezni. Sajnos azonban nem tudják előre megmondani, hogy pontosan mennyien lesznek, de egymás melletti szobában szeretnének lakni. Mivel éjszaka már nem lehet zavarni a korábban beköltözött vendégeket, ezért a portásnak előre intézkednie kell az este érkező vendégek elszállásolásáról. A kérdés tehát az, hogy a vendégeket miként költöztessük át úgy, hogy legyen akárhány szomszédos üres szobából álló rész? A feladat megoldása most sem bonyolultabb a korábbiaknál. A portás a következőt kéri a jelenlegi vendégektől: „Mindenki költözzön át abba a szobába, amelynek számát úgy kapja, hogy a mostani szobaszámát kettő kitevőjébe teszi." Vagyis, aki eddig az $n$ - edik szobában lakott az most elköltözik a $2^n$ szobába, s ez azért lesz megfelelő, mert kettő hatványai között tetszőlegesen nagy hézagok találhatóak. Hasonlóan jó megoldást kapunk akkor is, ha az $n$ - edik szoba lakói átpakolnak az $n$ - edik prímszám sorszámú szobába.

<u>Russel paradoxon:</u>

Legyen R az önmagukat elemként nem tartalmazó (reguláris) halmazok halmaza. A kérdés az, hogy R eleme - e ennek a sokaságnak (önmagának) vagy sem? Tekintsük először azt az esetet, amikor „R eleme R" - nek. Ekkor R olyan halmaz, amely önmagát tartalmazza elemként, tehát nem eleme R - nek. Az „R eleme R" - nek feltevés ezek alapján ellentmondásos. Ebből következik, hogy ennek az ellenkezője lesz igaz, vagyis amikor „R nem eleme R" - nek. Ez esetben azonban, mivel önmagát nem tartalmazza elemként, ezért R eleme lesz R - nek. Az „R nem eleme R" - nek feltevés így szintén ellentmondásos.

Összességében, nem igaz az sem, hogy R tartalmazza önmagát, és az sem, hogy R nem tartalmazza önmagát. Ilyen viszont nem lehetséges, mert ezek alapján egy állítás és annak ellenkezője is levezethető lenne. Emiatt ez a paradoxon a halmazelmélet alapjait rengette meg korábban. A matematikusok az idők során éppen ezért megreformálták a halmazelméletet és ennek lett az eredménye a modern axiomatikus halmazelmélet, mely nem engedi meg tetszőleges halmazok létrehozását.

<u>Borbély paradoxon:</u>

A szituáció a következő: Tegyük fel, hogy a laktanya katonai borbélya a szolgálati szabályzatnak megfelelően csak azokat a katonákat borotválja, akik maguk nem borotválkoznak, de nem borotválhatja azokat, akik maguk borotválkoznak. A kérdés az, hogy magát megborotválhatja-e a borbély?

Tekintsük először azt a lehetőséget, ha megborotválja magát. Ekkor olyan katonának számít, aki maga borotválja magát, de ekkor a szolgálati szabályzat megtiltja, hogy megborotválkozzon. Ellenkező esetben, ha nem borotválkozik, akkor a szolgálati szabályzat értelmében, olyan katonának számít, akit borotválnia kell. Látható tehát, hogy bármit is csinál, akár megborotválja magát, akár nem, vét a szabályok ellen.

Katalógus-paradoxon:

Vizsgáljuk meg a következő esetet: Tegyük fel, hogy elkészítjük a világon lévő összes könyv összes lehetséges szempont szerinti katalógusait. A katalógusok maguk is könyvek, így ezek is katalogizálhatóak és egy részük tartalmazza önmagát, vagyis a katalógus címe szerepel magában a katalógusban. A katalógusok nem feltétlenül kész, befejezett művek, tehát előfordulhat, hogy ha megjelenik egy új könyv, akkor eldöntjük, hogy szerepelnie kell - e az adott katalógusban, és ha igen, akkor beleírjuk. A kérdés az, hogy mit tegyünk, amikor az összes, önmagát nem tartalmazó katalógust listázzuk, vagyis cím szerint „Az önmagukat nem tartalmazó katalógusok katalógusát"?

A kérdés igazából arra irányul, hogy magát a katalógust beleírjuk – e ebbe a katalógusba. Amennyiben beleírjuk, akkor a katalógus tartalmazni fogja önmagát, tehát nem lesz önmagát nem tartalmazó. Ellenkező esetben, ha nem írjuk bele, a katalógus önmagát nem fogja tartalmazni. Ekkor viszont (mivel minden, önmagát nem tartalmazó katalógusnak be kell kerülnie ebbe a katalógusba) mégis bele kell írni a katalógusba, és így ismét ellentmondáshoz jutunk. Ezek alapján „Az önmagukat nem tartalmazó katalógusok katalógusa" tartalmazza önmagát, ha nem tartalmazza önmagát; és nem tartalmazza önmagát, ha tartalmazza önmagát. Ez pedig logikai ellentmondás.

Váratlan akasztás paradoxon:

A történet a következő: Egy akasztásra ítélt rab ítéletét azzal súlyosbítják, hogy az ítéletet a következő hét valamely napján váratlanul kell végrehajtani. A rab azonban így okoskodik: vasárnap nem lehet az akasztás, mert ha előzőleg nem akasztottak fel, akkor az egyetlen megmaradt lehetőség már nem váratlan. Ugyanígy a szombat sem lehet jó időpont, mert a vasárnap már kiesett, és ha szombatig nem akasztottak fel, akkor a szombati akasztás sem lesz már váratlan. Hasonló gondolatmenettel a hét mindegyik napjáról belátja, hogy aznap nem lehet váratlanul akasztani. Ezek alapján az ítéletet tehát nem hajthatják végre. Az ellentmondás abból adódik, hogy bár a gondolatmenete (péntektől) hibás, ő ezek alapján nem számít az akasztásra, tehát bármikor is lesz az ítélet végrehajtása, az számára meglepetés lesz.

Ezt követően megemlítek még két olyan paradoxont, melyek nem kapcsolódnak a matematikához, de az előzőekhez hasonlóan, szintén elgondolkodtatóak. Végül pedig két gyakorlati szituációt mutatok be, melyek szintén érdekes eredményre vezetnek.

Időparadoxon:

Ha visszautazom az időben, és megölöm az apámat még csecsemőkorában, akkor én nem fogok megszületni, tehát nem tudok visszamenni, hogy megöljem őt. Így meg fogok születni.

Olbers-paradoxon:

Miért fekete a csillagos ég, ha végtelen sok csillag van?

Házi feladat:

Varga Tamás tanítványainak házi feladatul tűzte ki, hogy otthon végezzenek el 200 érmedobást, és jegyezzék le a kapott eredményeket. Másnap a lecke ellenőrzésekor néhány pillanat alatt el tudta dönteni egy sorozatról, hogy a gazdája valóban elvégezte – e a 200 dobást, vagy csak hasraütés szerűen leírt egy fej - írás sorozatot. Mi lehetett a trükk?

A megoldás a következő: Megmutatható, hogy az esetek 90 % - ban a leghosszabb szomszédos fej (vagy írás) blokk nagysága nagyobb, mint 5. Az a gyerek pedig, aki magától gyárt egy sorozatot, kevésbé fog sok szomszédos fejet vagy írást írni egymás mellé.

Bliccelés:

Tegyük fel, hogy a DKV ellenőrök munkarendje munkanapon olyan, hogy egy adott buszjáraton reggel 7 óra és fél 8 között 4 % - os valószínűséggel találkozunk valamelyikükkel. Mivel kicsi a találkozás valószínűsége, ezért egy tanuló próbaképpen egy hónapon keresztül reggelenként egyszer sem lyukaszt jegyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 20 munkanapot megússza büntetés nélkül a diák?

A megoldás a következő: Mivel egy napot tekintve $\frac{96}{100}$ az esély arra, hogy elkerülje az ellenőröket, ezért 20 napot véve alapul a valószínűség P(A) = $0{,}96^{20} \approx 0{,}44$. Ebből látszik, hogy bár kicsi az ellenőrrel való találkozás esélye egy adott napon, mégis valószínűbb (56 %), hogy a diák lebukik 20 nap alatt, mint az, hogy megússza büntetés nélkül.

Brósch Zoltán