Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

1) Direkt bizonyítás:
Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

2) Indirekt bizonyítás:
Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

3) Teljes indukció:
Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

4) Skatulya – elv:
Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes ismétlés nélküli permutációjának száma: $P_n = n!$ (n faktoriális).

Bizonyítás:
Az első helyre az n elem bármelyikét választhatjuk.

A második helyre a megmaradt $(n-1)$ elem közül választhatunk.

Mivel a két választás függ egymástól, így az első két helyre összesen $n \cdot (n-1)$ – féleképpen helyezhetünk el elemet.

Hasonlóan folytatva, az utolsó helyre a fennmaradó 1 elemet tehetjük le.

Ezek alapján az összes lehetőség száma: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

■

TÉTEL:
Ha az n elem között a megegyező elemek száma $k_1, k_2, \ldots, k_l$ $(k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n)$, akkor az n elem összes ismétléses permutációjának száma: $P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_l} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}$.

Bizonyítás:
Amennyiben az n elem különböző lenne, akkor $n!$ lehetőségünk adódna.

Mivel a $k_1, k_2, \ldots, k_l$ számú azonos elem egymás közötti sorrendjét nem kell figyelembe vennünk, így az n elem összes lehetséges sorrendjét osztanunk kell $k_1!$ – sal, …, $k_l!$ – sal.

Ezek alapján az összes lehetőség száma: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}$.

■

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli variációinak száma: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Bizonyítás:
Az első helyre n elemből, a másodikra $(n-1)$ elemből, a k – adik helyre pedig már csak a megmaradt $\big(n-(k-1)\big) = (n-k+1)$ darab elemből választhatunk, vagyis az összes lehetőség száma: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Ezek alapján, a szorzatot $(n-k)!$ – sal bővítve azt kapjuk, hogy az összes lehetőség száma:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

■

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ismétléses variációinak száma: $V_n^{k,ism} = n^k$.

Bizonyítás:
Az első helyre n elemből, a második helyre ismét n elemből választhatunk, vagyis mind a k darab helyre n elemből választhatunk.

Ezek alapján az összes lehetőség száma: $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$.

■

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli kombinációinak száma: $C_n^k = \binom{n}{k}$ („n alatt a k").

Bizonyítás:
Először állítsuk sorba a kiválasztott k darab elemet. Az első helyre n elemből, a másodikra $(n-1)$ elemből, a k – adik helyre pedig már csak a megmaradt $(n-k+1)$ darab elemből választhatunk, vagyis az összes lehetőség száma: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Ezt követően, mivel a sorrend nem számít a kiválasztott elemek között, így a elehetőségek számát osztanunk kell $k!$ – sal.

Ezek alapján az összes lehetőség száma: $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$.

■

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétléses kombinációinak száma: $C_n^{k,ism} = \binom{n+k-1}{k}$.

Bizonyítás:
Egy adott $1; 2; \ldots; n$ elemekből alkotott ismétléses kombinációt jellemezzünk a következőképpen: írjunk le annyi $+$ jelet, amennyi 1 – es számjegy szerepel a kombinációban, majd egy | jelet, amely elválasztójelként funkcionál. Ezt követően annyi $+$ jelet, amennyi 2 – es szerepel a kombinációban, majd ismét egy | jelet, és így tovább. Végül annyi $+$ jelet, ahányszor az n – es szám a kombinációban szerepel, s ezután már nem teszünk | jelet.

Ezáltal mindegyik jelrendszer k darab $+$ jelből és $n-1$ darab | jelből áll, melyek egyértelműen meghatároznak egy k – ad osztályú ismétléses kombinációt. Továbbá egymástól különböző jelrendszerek egymástól különböző ismétléses kombinációkat adnak.

Ebből adódik, hogy az ismétléses kombinációk száma megegyezik egy k darab $+$ jelet és $n-1$ darab | jelet tartalmazó jelrendszer ismétléses permutációinak számával: $\frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$.

■

TÉTEL: (Binomiális – tétel)

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{1} \cdot a^1 b^{n-1} + \binom{n}{0} \cdot a^0 b^n$$

<u>Bizonyítás:</u>
Az $(a+b)^n$ – t írjuk fel n tényezős szorzat alakban:

$$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b).$$

A szorzás elvégzése során minden tagban az a és b kitevőjének összege n lesz, mert egy tagot úgy kapunk meg, hogy mindegyik tényezőből kiválasztjuk vagy az a – t, vagy a b – t, majd ezeket összeszorozzuk.

Az $a^n b^{n-k}$ tagot úgy kapjuk meg, ha n tényezőből választunk a – t és $(n-k)$ tényezőből pedig b – t, majd ezeket összeszorozzuk. Az n tényező közül $\binom{n}{k}$ – féleképpen választhatunk ki k tényezőt, tehát az összegben $\binom{n}{k}$ – szor fordul elő az $a^n b^{n-k}$ tag.

Ezek alapján az $(a+b)^n$ hatványozás elvégzése után a következőt kapjuk:

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{1} \cdot a^1 b^{n-1} + \binom{n}{0} \cdot a^0 b^n.$$

■

TÉTEL:
A binomiális együtthatóra fennállnak a következők: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ és $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$!

<u>Bizonyítás:</u>
Alakítsuk az egyenlőségek mindkét oldalát a következőképpen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{[n-(k+1)]! \cdot (k+1)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} =$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(k+1)]! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}$$

Mivel az egyes esetekben ugyanazt a kifejezést kaptuk, így a tulajdonságok teljesülnek.

■