Megoldások

1. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket!

a) $$\left.\begin{aligned}\sin(x+y)=0\\ \sin(x-y)=0\end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned}sin^2x-\cos y=1\\ sin^2x+\cos y=1\end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned}\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{4}\\ \cos x\cdot\cos y=\frac{3}{4}\end{aligned}\right\}$$

d) $$\left.\begin{aligned}\sin(x-y)=\frac{1}{2}\\ \cos(x+y)=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

a) $$\left.\begin{aligned}\sin(x+y)=0\\ \sin(x-y)=0\end{aligned}\right\}$$

A szögfüggvények segítségével alakítsuk át az egyenleteket a következőképpen:

$$\left.\begin{aligned}x+y=0+k\cdot\pi\\ x-y=0+l\cdot\pi\end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x=(k+l)\cdot\pi$.

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat, s a következő adódik: $2y=(k-l)\cdot\pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $\left((k+l)\cdot\frac{\pi}{2};(k-l)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, ahol $k,l\in\mathbb{Z}$.

b) $\left.\begin{array}{l} sin^2 x - \cos y = 1 \\ sin^2 x + \cos y = 1 \end{array}\right\}$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2 \cdot sin^2 x = 2$.

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, s a következő adódik: $2 \cdot \cos y = 0$.

Az egyenleteket rendezve a következő egyenletrendszer adódik:

$\left.\begin{array}{l} sin^2 x = 1 \\ \cos y = 0 \end{array}\right\}$

Az első egyenletből a következőket kapjuk: $\sin x = 1$ és $\sin x = -1$.

A $\sin x = 1$ egyenlet megoldása: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$.

A $\sin x = -1$ egyenlet megoldása: $x_2 = \frac{3\pi}{2} + l \cdot 2\pi$.

A második egyenletből a következőt kapjuk: $y = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldásai: $(k, l, m \in \mathbb{Z})$

$\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi\right)$ és $\left(\frac{3\pi}{2} + l \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi\right)$.

c) $\left.\begin{array}{l} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{array}\right\}$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y = 1$.

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt: $\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}$.

Az addíciós tételek segítségével rendezés után a következő egyenletrendszer adódik:

$$\left.\begin{aligned} \cos(x-y) &= 1 \\ \cos(x+y) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből a következőt kapjuk: $x - y = 0 + k \cdot 2\pi$.

A második egyenletből a következőket kapjuk: $x + y = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi$ és $x + y = \frac{5\pi}{3} + m \cdot 2\pi$.

Tekintsük először a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 + k \cdot 2\pi \\ x + y &= \tfrac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x = \frac{\pi}{3} + (k + l) \cdot 2\pi$.

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, s a következő adódik: $2y = \frac{\pi}{3} + (l - k) \cdot 2\pi$.

Tekintsük most a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 + k \cdot 2\pi \\ x + y &= \tfrac{5\pi}{3} + m \cdot 2\pi \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x = \frac{5\pi}{3} + (k + m) \cdot 2\pi$.

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, s a következő adódik: $2y = \frac{5\pi}{3} + (m - k) \cdot 2\pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldásai: $(k, l, m \in \mathbb{Z})$

$\left(\frac{\pi}{6} + (k + l) \cdot \pi; \frac{\pi}{6} + (l - k) \cdot \pi\right)$ és $\left(\frac{5\pi}{6} + (k + m) \cdot \pi; \frac{5\pi}{6} + (m - k) \cdot \pi\right)$.

d) $\left.\begin{aligned} \sin(x-y) &= \frac{1}{2} \\ \cos(x+y) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$

Az első egyenletből a következőket kapjuk: $x-y=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$ és $x-y=\frac{5\pi}{6}+l\cdot 2\pi$.

A második egyenletből a következőket kapjuk: $x+y=\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi$ és $x+y=\frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi$.

Tekintsük először a következő egyenletrendszert:

$\left.\begin{aligned} x-y &= \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \\ x+y &= \frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi \end{aligned}\right\}$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x=\frac{3\pi}{6}+(k+m)\cdot 2\pi$.

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, s a következő adódik: $2y=\frac{\pi}{6}+(m-k)\cdot 2\pi$.

Tekintsük másodszor a következő egyenletrendszert:

$\left.\begin{aligned} x-y &= \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \\ x+y &= \frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi \end{aligned}\right\}$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x=\frac{11\pi}{6}+(k+n)\cdot 2\pi$.

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, s a következő adódik: $2y=\frac{9\pi}{6}+(n-k)\cdot 2\pi$.

Tekintsük másodszor a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\frac{5\pi}{6}+l\cdot 2\pi \\ x+y&=\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x=\frac{7\pi}{6}+(l+m)\cdot 2\pi.$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, s a következő adódik: $2y=-\frac{3\pi}{6}+(m-l)\cdot 2\pi.$

Tekintsük végül a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\frac{5\pi}{6}+l\cdot 2\pi \\ x+y&=\frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x=\frac{15\pi}{6}+(l+n)\cdot 2\pi.$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, s a következő adódik: $2y=\frac{5\pi}{6}+(n-l)\cdot 2\pi.$

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldásai: $(k,l,m,n\in\mathbb{Z})$

$\left(\frac{\pi}{4}+(k+m)\cdot\pi;\frac{\pi}{12}+(m-k)\cdot\pi\right)$ és $\left(\frac{11\pi}{12}+(k+n)\cdot\pi;\frac{3\pi}{4}+(n-k)\cdot\pi\right)$.

$\left(\frac{7\pi}{12}+(l+m)\cdot\pi;-\frac{\pi}{4}+(m-l)\cdot\pi\right)$ és $\left(\frac{5\pi}{4}+(l+n)\cdot\pi;\frac{5\pi}{12}+(n-l)\cdot\pi\right)$.

2. Oldd meg a következő egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x-y=\frac{5\pi}{3}} \\ \boldsymbol{\sin x = 2\cdot \sin y} \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x+y=\frac{5\pi}{6}} \\ \boldsymbol{\frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3}} \end{aligned}\right\}$

Megoldás:

a) $\left.\begin{aligned} x-y=\frac{5\pi}{3} \\ \sin x = 2\cdot \sin y \end{aligned}\right\}$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x=\frac{5\pi}{3}+y$.

A kapott kifejezést helyettesítsük a második egyenletbe: $\sin\left(\frac{5\pi}{3}+y\right)=2\cdot\sin y$.

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen:

$\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos\frac{5\pi}{3}=2\cdot\sin y$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos y+\frac{1}{2}\cdot\sin y=2\cdot\sin y$

$\sqrt{3}\cdot\cos y=-3\cdot\sin y$

$tg\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ebből a következőt kapjuk: $y=\frac{5\pi}{6}+k\cdot\pi$.

Ezt visszahelyettesítve a következő adódik: $x=\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}+k\cdot\pi=\frac{5\pi}{2}+k\cdot\pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(k\in\mathbb{Z})$

$\left(\frac{5\pi}{2}+k\cdot\pi;\frac{5\pi}{6}+k\cdot\pi\right)$.

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{5\pi}{6} \\ \frac{\sin x}{\sin y} &= \sqrt{3} \end{aligned}\right\}$

Feltétel: $\sin y \neq 0 \quad \rightarrow \quad y \neq 0 + k \cdot \pi$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x = \frac{5\pi}{6} - y$.

A kapott kifejezést helyettesítsük a második egyenletbe: $\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - y\right)}{\sin y} = \sqrt{3}$.

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen:

$\sin\left(\frac{5\pi}{6} - y\right) = \sqrt{3} \cdot \sin y$

$\sin \frac{5\pi}{6} \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} \cdot \sin y$

$\frac{1}{2} \cdot \cos y + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin y = \sqrt{3} \cdot \sin y$

$\cos y = \sqrt{3} \cdot \sin y$

$ctg\ y = \sqrt{3}$

Ebből a következőt kapjuk: $y = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$. $\quad \rightarrow \quad$ megfelel a feltételnek

Ezt visszahelyettesítve a következő adódik: $x = \frac{5\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6} + l \cdot \pi\right) = \frac{2\pi}{3} - l \cdot \pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(k; l \in \mathbb{Z})$

$\left(\frac{2\pi}{3} - l \cdot \pi; \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi\right)$.

3. Oldd meg a következő egyenletrendszereket!

a) $$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\sin x - \cos y = \tfrac{1}{2}} \\ \boldsymbol{\cos 2x + \cos 2y = -\tfrac{3}{2}} \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{sin^2 x = \sin y} \\ \boldsymbol{cos^4 x = cos^2 y} \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

a) $$\left.\begin{aligned} \sin x - \cos y = \tfrac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = -\tfrac{3}{2} \end{aligned}\right\}$$

Alakítsuk át a második egyenletet a következőképpen:

$$cos^2 x - sin^2 x + cos^2 y - sin^2 y = -\frac{3}{2}$$

$$1 - sin^2 x - sin^2 x + cos^2 y - (1 - cos^2 y) = -\frac{3}{2}$$

$$sin^2 x - cos^2 y = \frac{3}{4}$$

Vezessünk be új ismeretleneket: legyen $a = \sin x$ és $b = \cos y$.

Ebből a következő egyenletrendszer adódik:

$$\left.\begin{aligned} a - b = \tfrac{1}{2} \\ a^2 - b^2 = \tfrac{3}{4} \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $a = \frac{1}{2} + b$.

A kapott kifejezést helyettesítsük a második egyenletbe: $\left(\frac{1}{2} + b\right)^2 - b^2 = \frac{3}{4}$.

Az egyenletet rendezve a következőt kapjuk: $b = \frac{1}{2}$.

Ebből visszahelyettesítés után a következő adódik: $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Helyettesítsük vissza a kapott értékeket: $\sin x = 1$ és $\cos y = \frac{1}{2}$.

A $\sin x = 1$ egyenlet megoldása: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$.

A $\cos y = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai: $y_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi$ és $y_2 = \frac{5\pi}{3} + m \cdot 2\pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldásai: $(k, l, m \in \mathbb{Z})$

$\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi\right)$ és $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{5\pi}{3} + m \cdot 2\pi\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r} sin^2x = \sin y \\ cos^4x = cos^2y \end{array}\right\}$

Alakítsuk át a második egyenletet a következőképpen:

$(cos^2x)^2 = cos^2y$

$(1 - sin^2x)^2 = 1 - sin^2y$

$1 - 2 \cdot sin^2x + sin^4x = 1 - sin^2y$

$sin^4x - 2 \cdot sin^2x = -sin^2y$

Helyettesítsünk be az első egyenletből: $sin^4x - 2 \cdot sin^2x = -(sin^2x)^2$.

Ebből rendezés után a következő egyenlet adódik: $sin^4x - sin^2x = 0$.

Vezessünk be új ismeretlent: legyen $a = sin^2x$.

Ebből a következő egyenlet adódik: $a^2 - a = 0$.

Ezt megoldva azt kapjuk, hogy $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$.

Helyettesítsük vissza a kapott értékeket: $sin^2 x = 0$ és $sin^2 x = 1$.

Ezt helyettesítsük vissza az első egyenletbe: $\sin y = 0$ és $\sin y = 1$.

A $sin^2 x = 0$ egyenlet megoldása: $x_1 = 0 + k \cdot \pi$.

A $sin^2 x = 1$ egyenlet megoldása: $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$.

A $\sin y = 0$ egyenlet megoldása: $y_1 = 0 + m \cdot \pi$.

A $\sin y = 1$ egyenlet megoldása: $y_2 = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldásai: $(k, l, m, n \in \mathbb{Z})$

$(0 + k \cdot \pi; 0 + m \cdot \pi)$ és $\left(\frac{\pi}{2} + l \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi\right)$.

4. Oldd meg a következő egyenletrendszereket!

a)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{tg\,x + tg\,y = 2} \\ \boldsymbol{2 \cdot \cos x \cdot \cos y = 1} \end{aligned}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{tg\,x + tg\,y = 1} \\ \boldsymbol{tg\,(x + y) = \frac{4}{3}} \end{aligned}\right\}$$

c)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y = \frac{\pi}{4}} \\ \boldsymbol{2 \cdot tg\,x - 3 \cdot tg\,y = 0} \end{aligned}\right\}$$

<u>Megoldás:</u>

a) $\left.\begin{array}{r} tg\, x + tg\, y = 2 \\ 2 \cdot \cos x \cdot \cos y = 1 \end{array}\right\}$

Feltétel: $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $y \neq \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$

Alakítsuk át az első egyenletet a következőképpen:

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = 2$

$\frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 2$

$\sin(x + y) = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y$

Helyettesítsünk be a második egyenletből: $\sin(x + y) = 1$.

Ebből a következőt kapjuk: $x + y = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi$.

Fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x = \frac{\pi}{2} - y + m \cdot 2\pi$.

Helyettesítsük ezt a második egyenletbe: $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - y + m \cdot 2\pi\right) \cdot \cos y = 1$.

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen:

$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \cdot \cos y = 1$

$2 \cdot \sin y \cdot \cos y = 1$

$\sin 2y = 1$

Ebből a következőt kapjuk: $y = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$. $\rightarrow$ megfelel a feltételnek

Ezt visszahelyettesítve a következő adódik: $x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi\right) + m \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + o \cdot \pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(k; l; m; n; o \in \mathbb{Z})$

$\left(\frac{\pi}{4} + o \cdot \pi; \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r} tg\ x + tg\ y = 1 \\ tg\ (x+y) = \frac{4}{3} \end{array}\right\}$

Feltétel: $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $y \neq \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$ $x + y \neq \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$

Alakítsuk át a második egyenletet a következőképpen: $\frac{tg\ x + tg\ y}{1 - tg\ x \cdot tg\ y} = \frac{4}{3}$.

Helyettesítsünk be az első egyenletből: $\frac{1}{1 - tg\ x \cdot tg\ y} = \frac{4}{3}$.

Ebből fejezzük ki az egyik ismeretlent tartalmazó szögfüggvényt: $tg\ x = \frac{1}{4 \cdot tg\ y}$.

Ezt helyettesítsük az első egyenletbe: $\frac{1}{4 \cdot tg\ y} + tg\ y = 1$.

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen:

$4 \cdot tg^2\ y - 4 \cdot tg\ y + 1 = 0$

$(2 \cdot tg\ y - 1)^2 = 0$

$tg\ y = \frac{1}{2}$

Ebből a következőt kapjuk: $y \approx 0{,}4636 + n \cdot \pi$.

Ezt visszahelyettesítve a következő adódik: $tg\ x = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $x \approx 0{,}4636 + o \cdot \pi$

A kapott számpár megfelel a feltételnek.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(k; l; m; n; o \in \mathbb{Z})$

$(0{,}4636 + o \cdot \pi; 0{,}4636 + n \cdot \pi)$.

c) $\left.\begin{aligned} x + y = \frac{\pi}{4} \\ 2 \cdot tg\, x - 3 \cdot tg\, y = 0 \end{aligned}\right\}$

Feltétel: $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $\quad y \neq \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $y = \frac{\pi}{4} - x$.

A kapott kifejezést helyettesítsük a második egyenletbe: $2 \cdot \mathrm{tg}\, x - 3 \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$.

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen:

$$2 \cdot tg\, x - 3 \cdot \mathrm{tg} \frac{tg\,\frac{\pi}{4} - tg\, x}{1 + tg\,\frac{\pi}{4} \cdot tg\, x} = 0$$

$$\frac{2 \cdot tg\, x + 2 \cdot tg^2\, x}{1 + tg\, x} - \frac{3 - 3 \cdot tg\, x}{1 + tg\, x} = 0$$

$$2 \cdot tg^2 x + 5 \cdot tg\, x - 3 = 0$$

Vezessünk be új ismeretlent: legyen $a = tg\, x$.

Ekkor a következő másodfokú egyenlet adódik: $2a^2 + 5a - 3 = 0$.

A megoldó képlet segítségével azt kapjuk, hogy az egyenlet megoldásai: $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_2 = -3$.

Helyettesítsük vissza a kapott értékeket: $tg\, x = \frac{1}{2}$ és $tg\, x = -3$.

A $tg\, x = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldása: $x_1 \approx 0{,}4636 + m \cdot \pi$. $\quad \rightarrow \quad$ megfelel a feltételnek

Ezt visszahelyettesítve a következő adódik: $y_1 = \frac{\pi}{4} - (0{,}4636 + m \cdot \pi) \approx 0{,}3218 + n \cdot \pi$.

A $tg\, x = -3$ egyenlet megoldása: $x_2 \approx -1{,}249 + o \cdot \pi$. $\quad \rightarrow \quad$ megfelel a feltételnek

Ezt visszahelyettesítve a következő adódik: $y_2 = \frac{\pi}{4} - (-1{,}249 + o \cdot \pi) \approx 2{,}0344 + p \cdot \pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(k; l; m; n; o; p \in \mathbb{Z})$

$(0{,}4636 + m \cdot \pi; 0{,}3218 + n \cdot \pi)$ és $(-1{,}249 + o \cdot \pi; 2{,}0344 + p \cdot \pi)$.

5. Oldd meg a következő egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} \mathbf{5^{\cos 2x + \cos 2y} = 1} \\ \mathbf{25^{\cos x \cdot \cos y} = 5} \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \mathbf{\log_2 y - \log_2 x = 1} \\ \mathbf{\log_3[\cos(x+y)] - \log_3[\sin(x+y)] = -\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} \mathbf{\sin x + \sin y = \sin(x+y)} \\ \mathbf{\cos x + \cos y = \cos(x+y)} \end{aligned}\right\}$

<u>Megoldás:</u>

a) $\left.\begin{aligned} 5^{\cos 2x + \cos 2y} = 1 \\ 25^{\cos x \cdot \cos y} = 5 \end{aligned}\right\}$

Alakítsuk át az egyenleteket az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x + \cos 2y = 0 \\ 2 \cdot \cos x \cdot \cos y = 1 \end{aligned}\right\}$$

Alakítsuk át az első egyenletet a következőképpen:

$$2 \cdot \cos\frac{2x+2y}{2} \cdot \cos\frac{2x-2y}{2} = 0$$

$$\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = 0$$

Alakítsuk át a második egyenletet a következőképpen:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 1.$$

Ebből a következő egyenletrendszer adódik:

$$\left.\begin{aligned} \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = 0 \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 1 \end{aligned}\right\}$$

Egy szorzat értéke csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Az első egyenletből a következőket kapjuk: $\cos(x+y)=0$ és $\cos(x-y)=0$.

Ezeket helyettesítsük a második egyenletbe: $\cos(x-y)=1$ és $\cos(x+y)=1$.

A $\cos(x+y)=0$ egyenlet megoldása: $x+y=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$.

A $\cos(x-y)=0$ egyenlet megoldása: $x-y=\frac{\pi}{2}+l\cdot\pi$.

A $\cos(x-y)=1$ egyenlet megoldása: $x-y=0+m\cdot 2\pi$.

A $\cos(x+y)=1$ egyenlet megoldása: $x+y=0+n\cdot\pi$.

Tekintsük először a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \\ x-y&=0+m\cdot 2\pi \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x=\frac{\pi}{2}+(k+2m)\cdot\pi$.

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat, s a következő adódik: $2y=\frac{\pi}{2}+(k-2m)\cdot\pi$.

Tekintsük most a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\frac{\pi}{2}+l\cdot\pi \\ x+y&=0+n\cdot 2\pi \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a két egyenletet, s a következő adódik: $2x=\frac{\pi}{2}+(l+2n)\cdot\pi$.

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, s a következő adódik: $2y=-\frac{\pi}{2}+(2n-l)\cdot\pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldásai: $(k,l,m,n\in\mathbb{Z})$

$\left(\frac{\pi}{4}+(k+2m)\cdot\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}+(k-2m)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ és $\left(\frac{\pi}{4}+(l+2n)\cdot\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}+(2n-l)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

b) $$\left.\begin{array}{r} \log_2 y - \log_2 x = 1 \\ \log_3[cos\ (x+y)] - \log_3[sin\ (x+y)] = -\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Feltétel: $x > 0$ $y > 0$ $cos\ (x+y) > 0$ $sin\ (x+y) > 0$

Alakítsuk át az egyenleteket a logaritmus azonosságainak segítségével:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{y}{x} = 2 \\ \frac{\cos\ (x+y)}{\sin\ (x+y)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\}$$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $y = 2x$.

A kapott kifejezést helyettesítsük a második egyenletbe: $\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen: $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 3x - \cos 3x = 0$.

Osszuk el az egyenletet $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ – mal: $\frac{1}{2} \cdot \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 3x = 0$.

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen:

$$\cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin 3x - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos 3x = 0$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

Ebből a következőt kapjuk: $x_1 = \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ és $x_2 = \frac{4\pi}{9} + l \cdot \frac{2\pi}{3}$.

Ezt visszahelyettesítve a következő adódik: $y_1 = \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{4\pi}{3}$ és $y_2 = \frac{8\pi}{9} + l \cdot \frac{4\pi}{3}$.

Az $(x_2; y_2)$ számpár nem felel meg a feltételnek.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(k \in \mathbb{Z})$

$$\left(\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{4\pi}{3}\right).$$

c) $\left.\begin{array}{r} \sin x + \sin y = \sin(x+y) \\ \cos x + \cos y = \cos(x+y) \end{array}\right\}$

Alakítsuk át az első egyenletet a következőképpen:

$$2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \sin\left(2 \cdot \frac{x+y}{2}\right)$$

$$2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$$

$$2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0$$

Alakítsuk át a második egyenletet a következőképpen:

$$2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \cos\left(2 \cdot \frac{x+y}{2}\right)$$

$$2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = cos^2\ \frac{x+y}{2} - sin^2\ \frac{x+y}{2}$$

$$2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = cos^2\ \frac{x+y}{2} - \left(1 - cos^2\ \frac{x+y}{2}\right)$$

$$2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \left(\cos\frac{x-y}{2} - cos\ \frac{x+y}{2}\right) + 1 = 0$$

Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{r} 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0 \\ 2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \left(\cos\frac{x-y}{2} - cos\ \frac{x+y}{2}\right) = -1 \end{array}\right\}$$

Egy szorzat értéke csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

A második egyenletből adódik, hogy a zárójeles kifejezés értéke nem lehet 0.

Ebből a következőt kapjuk: $\sin\frac{x+y}{2} = 0$.

Az egyenlet megoldása: $\frac{x+y}{2} = 0 + k \cdot \pi$.

Fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x = -y + k \cdot 2\pi$.

A kapott kifejezést helyettesítsük az egyik egyenletbe:

$\cos\ (-y + k \cdot 2\pi) + \cos y = \cos\ (-y + k \cdot 2\pi + y)$.

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen:

$\cos\ (-y) + \cos y = 1$

$\cos y + \cos y = 1$

$\cos y = \frac{1}{2}$

Ebből a következőt kapjuk: $y_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi$ és $y_2 = \frac{5\pi}{3} + m \cdot 2\pi$.

Ezt visszahelyettesítve a következő adódik:

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + (k - l) \cdot 2\pi$ és $x_2 = -\frac{5\pi}{3} + (k - m) \cdot 2\pi$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldásai: $(k, l, m \in \mathbb{Z})$

$\left(-\frac{\pi}{3} + (k - l) \cdot 2\pi; \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi\right)$ és $\left(-\frac{5\pi}{3} + (k - m) \cdot 2\pi; \frac{5\pi}{3} + m \cdot 2\pi\right)$.