Megoldások

1. Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)=(2x+1)\cdot(2x+2)\cdot(2x+3)$

b) $x^4-3x^2-4=0$

c) $2x^6+14x^3-16=0$

d) $x^{\frac{4}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}+4=0$

e) $8\cdot(x-1)^6-215\cdot(x-1)^3-27=0$

f) $(x^2+x)^2-2\cdot(x^2+x)=24$

g) $(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+2)-30=0$

Megoldás:
Amennyiben szükséges, vezessünk be új ismeretlent, s oldjuk meg a kapott másodfokú egyenletet, majd a megoldásokat helyettesítsük vissza a bevezetett ismeretlen helyére.

a) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)=(2x+1)\cdot(2x+2)\cdot(2x+3)$

Rendezzük az egyenletet a következőképpen:

$(x^2+3x+2)\cdot(x+3)=(4x^2+6x+2)\cdot(2x+3)$

$x^3+6x^2+11x+6=8x^3+24x^2+22x+6$

$7x^3+18x^2+11x=0$

$x\cdot(7x^2+18x+11)=0$

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ebből adódik, hogy $x=0$, vagy $7x^2+18x+11=0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1=-1$ és $x_2=-\frac{11}{7}$.

Ezek alapján a megoldás: $x_1=-1$; $x_2=-\frac{11}{7}$ és $x_3=0$.

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Legyen: $a = x^2$.

Ekkor behelyettesítés után a következő egyenlethez jutunk: $a^2 - 3a - 4 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $a_1 = 4$ és $a_2 = -1$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a következő adódik:

Ha $a_1 = 4$, akkor $x^2 = 4$, vagyis $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$.

Ha $a_2 = -1$, akkor $x^2 = -1$, vagyis nincs megoldás.

Ezek alapján a megoldás: $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$.

c) $2x^6 + 14x^3 - 16 = 0$

Legyen: $a = x^3$.

Ekkor behelyettesítés után a következő egyenlethez jutunk: $2a^2 + 14a - 16 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $a_1 = 1$ és $a_2 = -8$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a következő adódik:

Ha $a_1 = 1$, akkor $x^3 = 1$, vagyis $x_1 = 1$.

Ha $a_2 = -8$, akkor $x^3 = -8$, vagyis $x_2 = -2$.

Ezek alapján a megoldás: $x_1 = 1$ és $x_2 = -2$.

d) $x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$

Legyen: $a = x^{\frac{2}{3}}$.

Ekkor behelyettesítés után a következő egyenlethez jutunk: $a^2 - 5a + 4 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $a_1 = 1$ és $a_2 = 4$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a következő adódik:

Ha $a_1 = 1$, akkor $x^{\frac{2}{3}} = 1$, vagyis $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$.

Ha $a_2 = 4$, akkor $x^{\frac{2}{3}} = 4$, vagyis $x_3 = 8$ és $x_4 = -8$.

Ezek alapján a megoldás: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 8$ és $x_4 = -8$.

e) $8 \cdot (x-1)^6 - 215 \cdot (x-1)^3 - 27 = 0$

Legyen: $a = (x-1)^3$.

Ekkor behelyettesítés után a következő egyenlethez jutunk: $8a^2 - 215a - 27 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $a_1 = -\frac{1}{8}$ és $a_2 = 27$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a következő adódik:

Ha $a_1 = -\frac{1}{8}$, akkor $(x-1)^3 = -\frac{1}{8}$, vagyis $x_1 = \frac{1}{2}$.

Ha $a_2 = 27$, akkor $(x-1)^3 = 27$, vagyis $x_2 = 4$.

Ezek alapján a megoldás: $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = 4$.

f) $(x^2 + x)^2 - 2 \cdot (x^2 + x) = 24$

Legyen: $a = x^2 + x$.

Ekkor behelyettesítés után a következő egyenlethez jutunk: $a^2 - 2a - 24 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $a_1 = -4$ és $a_2 = 6$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a következő adódik:

Ha $a_1 = -4$, akkor $x^2 + x = -4$, vagyis: $x^2 + x + 4 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy nincs megoldás.

Ha $a_1 = 6$, akkor $x^2 + x = 6$, vagyis $x^2 + x - 6 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1 = -3$ és $x_2 = 2$.

Ezek alapján a megoldás: $x_1 = -3$ és $x_2 = 2$.

g) $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) - 30 = 0$

Legyen: $a = x^2 + x + 1$.

Ekkor behelyettesítés és rendezés után a következő egyenlethez jutunk: $a^2 + a - 30 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $a_1 = -6$ és $a_2 = 5$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a következő adódik:

Ha $a_1 = -6$, akkor $x^2 + x + 1 = -6$, vagyis $x^2 + x + 7 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy nincs megoldás.

Ha $a_1 = 5$, akkor $x^2 + x + 1 = 5$, vagyis $x^2 + x - 4 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ és $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Ezek alapján a megoldás: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ és $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

2. Oldd meg a következő magasabb fokú egyenleteket!

a) $\boldsymbol{2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0}$

b) $\boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0}$

c) $\boldsymbol{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0}$

Megoldás:
A megoldásokhoz a következőket használhatjuk fel: szorzattá alakítás kiemeléssel vagy polinomok osztásával; szimmetrikus egyenletek tulajdonságaival.

a) $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

Ebben az esetben az együtthatók szimmetrikusan helyezkednek el: $2;\ -3;\ -1;\ -3;\ 2$.

Ekkor az egyenlet rendezése után egy alkalmas helyettesítéssel átalakíthatjuk másodfokú egyenletté. A szimmetrikus egyenletek esetében, ha x megoldása az egyenletnek, akkor az $\frac{1}{x}$ is megoldás lesz. Az ilyen tulajdonságú egyenleteket reciprok egyenleteknek nevezzük.

Osszuk el az egyenletet x^2 – tel (mivel $x = 0$ nem megoldás): $2x^2 - 3x - 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$.

Hozzuk a következő alakra az egyenletet: $2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$.

Mivel $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, ezért a következőt kapjuk: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$.

Ezt helyettesítsük az egyenletbe, s rendezzük a következőképpen:

$$2 \cdot \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] - 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$2 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$$

Legyen: $a = x + \frac{1}{x}$.

Ekkor behelyettesítés és rendezés után a következő egyenlethez jutunk: $2a^2 - 3a - 5 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $a_1 = \frac{5}{2}$ és $a_2 = -1$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a következő adódik:

Ha $a_1 = \frac{5}{2}$, akkor $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, vagyis $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1 = 2$ és $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ha $a_2 = -1$, akkor $x + \frac{1}{x} = -1$, vagyis $x^2 + x + 1 = 0$.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenletnek nincs valós megoldása.

Ezek alapján a megoldás: $x_1 = 2$ és $x_2 = \frac{1}{2}$.

b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Alakítsuk át a bal oldalt a következőképpen:

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$

$= x^2 \cdot (x-1) - 5x \cdot (x-1) + 6 \cdot (x-1) = (x^2 - 5x + 6) \cdot (x-1)$.

Az egyenlet így felírható a következő alakban is: $(x^2 - 5x + 6) \cdot (x-1) = 0$.

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ha az $x - 1 = 0$, akkor $x_1 = 1$.

Ha az $x^2 - 5x + 6 = 0$, akkor a megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_2 = 2$ és $x_3 = 3$.

Ezek alapján a megoldás: $x_1 = 1, x_2 = 2$ és $x_3 = 3$.

c) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

Rendezzük az egyenletet a következőképpen: $x \cdot (x^3 + x^2 - 7x - 1) = -6$.

Ebből látható, hogy ha van egész megoldás, akkor biztosan osztója lesz a (-6) – nak, vagyis az x értéke a következő lehet: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$.

Próbálgatások (behelyettesítések) után kapjuk, hogy $x_1 = -1$ megoldása az egyenletnek.

Mivel a gyöktényezős alak magasabb fokú egyenletnél is fennáll, ezért azt alkalmazva, az eredeti egyenletünk bal oldala egy első és egy harmadfokú polinom szorzataként is felírható.

Osszuk el a bal oldalán álló kifejezést $(x + 1)$ – gyel:

$(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x + 1) = x^3 - 7x + 6$
$\underline{x^4 + x^3 \qquad\qquad\qquad}$

$-7x^2 - x + 6$
$\underline{-7x^2 - 7x \quad}$

$6x + 6$
$\underline{6x + 6\ }$
0

Az egyenlet így felírható a következő alakban is: $(x + 1) \cdot (x^3 - 7x + 6) = 0$.

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Oldjuk meg az $x^3 - 7x + 6 = 0$ egyenletet.

Az előzőhöz hasonlóan az egyenlet bal oldala felírható egy első és egy másodfokú polinom szorzataként.

Rendezzük az egyenletet a következőképpen: $x \cdot (x^2 - 7) = -6$.

Ebből látható, hogy ha van egész megoldás, akkor biztosan osztója lesz a (-6) – nak, vagyis az x értéke a következő lehet: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$.

Próbálgatások (behelyettesítések) után kapjuk, hogy $x_1 = 1$ megoldása az egyenletnek.

Osszuk el a bal oldalán álló kifejezést $(x-1)$ – gyel:

$$\begin{array}{l}
(x^3-7x+6):(x-1)=x^2+x-6 \\
\underline{x^3-x^2\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\\
x^2-7x+6 \\
\underline{x^2-x\qquad\qquad} \\
\\
-6x+6 \\
\underline{-6x+6\quad} \\
0
\end{array}$$

Az egyenlet így felírható a következő alakban is: $(x-1)\cdot(x^2+x-6)=0$.

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Oldjuk meg az $x^2+x-6=0$ egyenletet.

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1=2$ és $x_2=-3$.

Ezek alapján a megoldás: $x_1=-1, x_2=1, x_3=2$ és $x_4=-3$.

3. Oldd meg a következő irracionális egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{\sqrt{x+2}=5}$

b) $\boldsymbol{\sqrt[3]{3-x}=-1}$

c) $\boldsymbol{\sqrt[4]{2x-1}=-3}$

d) $\boldsymbol{\sqrt{x+7}=\sqrt{x-3}}$

e) $\boldsymbol{2-\sqrt[4]{6-3x}=-1}$

<u>Megoldás:</u>
Az egyenletet úgy kell rendeznünk, hogy mindkét oldalon maximum egy irracionális kifejezés álljon. A hatványozás előtt fel kell írnunk az értelmezési tartományt (feltételt): páros kitevőjű gyök alatt csak nem negatív számok állhatnak.

a) $\sqrt{x+2} = 5$ → Értelmezési tartomány: $x + 2 \geq 0$ → $x \geq -2$

$x + 2 = 25$

$x = 23$ → Megfelel a feltételnek, így ez egy jó megoldás.

b) $\sqrt[3]{3-x} = -1$ → Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$ (gyökkitevő páratlan)

$3 - x = -1$

$x = 4$ → Megfelel a feltételnek, így ez egy jó megoldás.

c) $\sqrt[4]{2x-1} = -3$ → Értelmezési tartomány: Az egyenletnek nincs megoldása, mert páros kitevőjű gyök értéke csak pozitív szám lehet.

d) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x-3}$ → Értelmezési tartomány: $x + 7 \geq 0$ → $x \geq -7$

$x - 3 \geq 0$ → $x \geq 3$

Ezeket összevonva: $x \geq 3$

$x + 7 = x - 3$

$7 \neq -3$ → Ellentmondás: nincs megoldás.

e) $2 - \sqrt[4]{6-3x} = -1$ → Értelmezési tartomány: $6 - 3x \geq 0$ → $2 \geq x$

$\sqrt[4]{6-3x} = 3$

$6 - 3x = 81$

$x = -25$ → Megfelel a feltételnek, így ez egy jó megoldás.

4. Oldd meg a következő irracionális egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{x - \sqrt{2x+1} = 1}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{10-x} - x + 10 = 0}$

c) $\boldsymbol{\sqrt[20]{x-130} = 17 - x}$

d) $\boldsymbol{\frac{x+1}{\sqrt{5x-1}} = \sqrt{x}}$

e) $\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{1}{5} - 3x} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0}$

f) $\boldsymbol{\sqrt[4]{2x - \frac{7}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Megoldás:
Az egyenletet úgy kell rendeznünk, hogy mindkét oldalon maximum egy irracionális kifejezés álljon. A hatványozás előtt fel kell írnunk az értelmezési tartományt (feltételt): páros kitevőjű gyök alatt csak nem negatív számok állhatnak.

a) $x - \sqrt{2x+1} = 1$ → Értelmezési tartomány: $2x + 1 \geq 0$ → $x \geq -\frac{1}{2}$

$\sqrt{2x+1} = x - 1$ → Újabb feltétel: $x - 1 \geq 0$ → $x \geq 1$.

Feltételeket összevetve: $x \geq 1$.

$2x + 1 = (x-1)^2$

$x^2 - 4x = 0$

$x \cdot (x - 4) = 0$

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ebből a következők adódnak: $x_1 = 0$, illetve $x - 4 = 0$, vagyis $x_2 = 4$.

Az első eredmény nem felel meg a feltételnek.

Ezek alapján a megoldás: $x = 4$.

b) $\sqrt{10-x}-x+10=0$ → Értelmezési tartomány: $10-x \geq 0$ → $10 \geq x$

$\sqrt{10-x}=x-10$ → Újabb feltétel: $x-10 \geq 0$ → $x \geq 10.$

Feltételeket összevetve: az egyenlet megoldása $x=10.$

c) $\sqrt[20]{x-130}=17-x$ → Értelmezési tartomány: $x-130 \geq 0$ → $x \geq 130$

$17-x \geq 0$ → $17 \geq x$

Feltételeket összevetve: nincs megoldás.

d) $\frac{x+1}{\sqrt{5x-1}}=\sqrt{x}$ → Értelmezési tartomány: $5x-1 \geq 0$ → $x \geq \frac{1}{5}$

$x \geq 0$

Feltételeket összevetve: $x \geq \frac{1}{5}$.

$x+1=\sqrt{x \cdot (5x-1)}$ → Újabb feltétel: $x+1 \geq 0$ → $x \geq -1$

Feltételeket összevetve: $x \geq 0.$

$(x+1)^2=5x^2-x$

$4x^2-3x-1=0$

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1=-\frac{1}{4}$ és $x_2=1.$

Az első eredmény nem felel meg a feltételnek.

Ezek alapján a megoldás: $x=1.$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}-3x}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=0$ → Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$ (gyökkitevő páratlan).

$\sqrt[3]{\frac{1}{5}-3x}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\frac{1}{5}-3x=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{7}{30}$ → Megfelel a feltételnek, így ez egy jó megoldás.

f) $\sqrt[4]{2x - \frac{7}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ → Értelmezési tartomány: $2x - \frac{7}{4} \geq 0$ → $x \geq \frac{7}{8}$

$2x - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$

$x = 1$ → Megfelel a feltételnek, így ez egy jó megoldás.

5. Oldd meg a következő irracionális egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{4+x} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+25} = 0}$

c) $\boldsymbol{2 \cdot \sqrt{3+x} - \sqrt{-2x} = 4}$

Megoldás:
Arra kell törekednünk, hogy mindkét oldalon maximum 2 négyzetgyökös kifejezés álljon, mert így többszörös négyzetre emeléssel ezek eltűnnek. Mivel a négyzetre emeléssel bejöhetnek hamis gyökök, ezért a megoldás során újabb feltételeket kell szabnunk.

a) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$ → Értelmezési tartomány: $2x + 5 \geq 0$ → $x \geq -\frac{5}{2}$

$x - 1 \geq 0$ → $x \geq 1$

Feltételeket összevetve: $x \geq 1$.

$\left(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1}\right)^2 = 64$

$2x + 5 + 2 \cdot \sqrt{(2x+5) \cdot (x-1)} + x - 1 = 64$

$2 \cdot \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 60 - 3x$ → Újabb feltétel: $60 - 3x \geq 0 \rightarrow 20 \geq x$

Feltételeket összevetve: $1 \leq x \leq 20$.

$4 \cdot (2x^2 + 3x - 5) = 3600 - 360x + 9x^2$

$x^2 - 372x + 3620 = 0$

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1 = 10$ és $x_2 = 362$.

A második eredmény nem felel meg a feltételnek.

Ezek alapján a megoldás: $x = 10$.

b) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+25}=0$

Értelmezési tartomány: $4+x\geq 0 \quad\rightarrow\quad x\geq -4$

$x+9\geq 0 \quad\rightarrow\quad x\geq -9$

$x+25\geq 0 \quad\rightarrow\quad x\geq -25$

Feltételeket összevetve: $x\geq -4$.

$\sqrt{4+x}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x+25}$

$\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{x+9}\right)^2=x+25$

$4+x+2\cdot\sqrt{(4+x)\cdot(x+9)}+x+9=x+25$

$2\cdot\sqrt{x^2+13x+36}=12-x \quad\rightarrow$ Újabb feltétel: $12-x\geq 0\rightarrow 12\geq x$

Feltételeket összevetve: $-4\leq x\leq 12$.

$4\cdot(x^2+13x+36)=144-24x+x^2$

$3x^2+76x=0$

$x\cdot(3x+76)=0$

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ebből a következők adódnak: $x_1=0$, illetve $3x+76=0$, vagyis $x_2=-\frac{76}{3}$.

A második eredmény nem felel meg a feltételnek.

Ezek alapján a megoldás: $x=0$.

c) $2\cdot\sqrt{3+x}-\sqrt{-2x}=4 \quad\rightarrow$ Értelmezési tartomány: $3+x\geq 0 \quad\rightarrow\quad x\geq -3$

$-2x\geq 0 \quad\rightarrow\quad x\geq 0$

Feltételeket összevetve: $x\geq 0$.

$2 \cdot \sqrt{3+x} = 4 + \sqrt{-2x}$

$4 \cdot (3+x) = \left(4 + \sqrt{-2x}\right)^2$

$12 + 4x = 16 + 8 \cdot \sqrt{-2x} - 2x$

$8 \cdot \sqrt{-2x} = 6x - 4$ $\rightarrow$ Újabb feltétel: $6x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{2}{3}$

Feltételeket összevetve: $x \geq \frac{2}{3}$.

$-128x = (6x-4)^2$

$9x^2 + 20x + 4 = 0$

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1 = -\frac{2}{9}$ és $x_2 = -2$.

A két eredmény nem felel meg a feltételnek: nincs megoldás.

6. Oldd meg a következő irracionális egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{\sqrt{3x+5} + \sqrt{10-x} = \frac{15}{\sqrt{10-x}}}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{3+\sqrt{5-x}} = \sqrt{x}}$

c) $\boldsymbol{\sqrt{x+5-4\cdot\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\cdot\sqrt{x+1}} = 1}$

Megoldás:

a) $\sqrt{3x+5} + \sqrt{10-x} = \frac{15}{\sqrt{10-x}}$

Értelmezési tartomány: $3x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{5}{3}$

$10 - x \geq 0 \rightarrow 10 \geq x$

Feltételeket összevetve: $-\frac{5}{3} \leq x \leq 10$.

$\sqrt{(3x+5)\cdot(10-x)} + 10 - x = 15$

$\sqrt{-3x^2+25x+50} = x+5$ → Újabb feltétel: $x+5 \geq 0$ → $x \geq -5$

Feltételeket összevetve: $-\frac{5}{3} \leq x \leq 10$.

$-3x^2+25x+50 = (x+5)^2$

$4x^2-15x-25=0$

A megoldóképlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1 = -\frac{5}{4}$ és $x_2 = 5$.

A két eredmény megfelel a feltétlenek, így a megoldás: $x_1 = -\frac{5}{4}$ és $x_2 = 5$.

b) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}} = \sqrt{x}$ → Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$5-x \geq 0$ → $5 \geq x$

$3+\sqrt{5-x} \geq 0$

Feltételeket összevetve: $0 \leq x \leq 5$.

$3+\sqrt{5-x} = x$

$\sqrt{5-x} = x-3$ → Újabb feltétel: $x-3 \geq 0$ → $x \geq 3$

Feltételeket összevetve: $3 \leq x \leq 5$

$5-x = (x-3)^2$

$x^2-5x+4=0$

A megoldó képlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x=1$ és $x=4$.

Az első eredmény nem felel meg a feltételnek.

Ezek alapján a megoldás: $x=4$.

c) $\sqrt{x+5-4\cdot\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\cdot\sqrt{x+1}}=1$

Értelmezési tartománya: $x+1\geq 0$ → $x\geq -1$

$x+5-4\cdot\sqrt{x+1}\geq 0$

$x+2-2\cdot\sqrt{x+1}\geq 0$

Legyen: $a=\sqrt{x+1}$.

$\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2-2a+1}=1$

$\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=1$

$|a-2|+|a-1|=1$

I. Az ág értelmezési tartománya: $a<1$.

$-a+2+(-a+1)=1$

$a=1$ → Nem felel meg az ág feltételének.

II. Az ág értelmezési tartománya: $1\leq a<2$.

$-a+2+a-1=1$

$1=1$ → Azonosság, megoldás: $1\leq a<2$.

III. Az ág értelmezési tartománya: $a\geq 2$.

$a-2+a-1=1$

$a=2$ → Megfelel az ág feltételének.

Ebből a következő adódik: $1\leq a\leq 2$.

Helyettesítsünk vissza: $1\leq\sqrt{x+1}\leq 2$.

Ezek alapján a megoldás: $0\leq x\leq 3$. → Megfelel a feltételnek.

7. Oldd meg a következő irracionális egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\sqrt{x^2-4x} \geq x-4$

b) $\sqrt{x+12} < x$

c) $\sqrt{x^2-1} < 5-x$

d) $\sqrt{20-x} - \sqrt{10-x} > 2$

e) $\sqrt{x^2+4x} > 2-x$

Megoldás:
Irracionális egyenlőtlenségeknél meg kell vizsgálnunk a két oldal 0 - hoz viszonyított értékét. Abban az esetben, ha mindkét oldal pozitív, akkor mindkét oldalt négyzetre emelhetjük, s a reláció iránya nem változik meg. Amennyiben az egyik oldalról nem tudjuk eldönteni egyértelműen, hogy az értéke pozitív vagy negatív, akkor két águnk lesz.

a) $\sqrt{x^2-4x} \geq x-4$

Értelmezési tartomány: $x^2-4x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 0$ vagy $4 \leq x$

Megvizsgálva a két oldalt azt kapjuk, hogy a baloldal biztosan pozitív lesz, míg a jobb oldalról nem tudjuk eldönteni egyértelműen, hogy az értéke pozitív vagy negatív. Így két ágat kell megkülönböztetnünk a megoldás során.

I. Ha a jobb oldal negatív. Feltétel: $x-4<0 \quad \rightarrow \quad x<4$

Ekkor az egyenlőtlenség bal oldala egy pozitív szám lesz, míg a jobb oldala egy negatív szám, így minden ilyen feltétel mellett teljesül az egyenlőtlenség. Ezen az ágon tehát a megoldás maga a feltétel: $x<4$.

Ezt összevetve a kezdeti feltétellel a következőt kapjuk: $x \leq 0$.

II. Ha a jobb oldal pozitív. Feltétel: $x-4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 4$

Ekkor az egyenlőtlenség mindkét oldala egy pozitív szám lesz, így elvégezhetjük a négyzetre emelést a reláció megváltoztatása nélkül, s megoldhatjuk az egyenlőtlenséget.

$x^2-4x \geq x^2-8x+16$

$x \geq 4$

Ezt összevetve az ág feltételével a következőt kapjuk: $x \geq 4$.

Ezt összevetve a kezdeti feltétellel a következőt kapjuk: $x \geq 4$.

Mivel a két ág független egymástól, ezért mindkét ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $x \leq 0$ vagy $x \geq 4$.

b) $\sqrt{x+12} < x$

Értelmezési tartomány: $x + 12 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -12$

Mivel a baloldalon egy pozitív szám áll, a jobb oldal pedig ennél nagyobb, így a jobb oldalra is írható feltétel: $x > 0$.

A két eredményt összevetve a feltétel a következő lesz: $x > 0$.

Megvizsgálva a két oldalt azt kapjuk, hogy a bal és a jobb oldal is biztosan pozitív lesz. Így csak egy águnk lesz a megoldás során, ahol elvégezhetjük a négyzetre emelést a reláció megváltoztatása nélkül és megoldhatjuk az egyenlőtlenséget.

$x + 12 < x^2$

$x^2 - x - 12 > 0$

Ebből a következőt kapjuk: $x < -3$ vagy $4 < x$.

Ezt összevetve a kezdeti feltétellel a végső megoldásunk: $4 < x$.

c) $\sqrt{x^2-1} < 5 - x$

Értelmezési tartomány: $x^2 - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq -1$ vagy $x \geq 1$

Mivel a baloldalon egy pozitív szám áll, a jobb oldal pedig ennél nagyobb, így a jobb oldalra is írható feltétel: $5 - x > 0 \rightarrow x < 5$.

A két eredményt összevetve a feltétel a következő lesz: $x \leq -1$ vagy $1 \leq x < 5$.

Megvizsgálva a két oldalt azt kapjuk, hogy a bal és a jobb oldal is biztosan pozitív lesz. Így csak egy águnk lesz a megoldás során, ahol elvégezhetjük a négyzetre emelést a reláció megváltoztatása nélkül és megoldhatjuk az egyenlőtlenséget.

$x^2 - 1 < 25 - 10x + x^2$

$x < \frac{13}{5}$

Ezt összevetve a kezdeti feltétellel a végső megoldásunk: $x \leq -1$ vagy $1 \leq x < \frac{13}{5}$.

d) $\sqrt{20-x} - \sqrt{10-x} > 2$

Értelmezési tartomány: $20 - x \geq 0 \quad \rightarrow \quad 20 \geq x$

$10 - x \geq 0 \quad \rightarrow \quad 10 \geq x$

A két eredményt összevetve a feltétel a következő lesz: $10 \geq x$.

Megvizsgálva a két oldalt azt kapjuk, hogy a bal és a jobb oldal is biztosan pozitív lesz. Így csak egy águnk lesz a megoldás során, ahol elvégezhetjük a négyzetre emelést a reláció megváltoztatása nélkül és megoldhatjuk az egyenlőtlenséget.

$20 - x - 2 \cdot \sqrt{(20-x) \cdot (10-x)} + 10 - x > 4$

$\sqrt{x^2 - 30x + 200} < 13 - x \quad \rightarrow$ Újabb feltétel: $13 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 13$.

Feltételeket összevetve: $10 \geq x$.

Emeljük ismét négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát:

$x^2 - 30x + 200 < 169 - 26x + x^2$

$x > \frac{31}{4}$

Ezt összevetve a kezdeti feltétellel a végső megoldásunk: $\frac{31}{4} < x \leq 10$.

e) $\sqrt{x^2+4x} > 2-x$

Értelmezési tartomány: $x^2+4x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq -4$ vagy $0 \leq x$.

Megvizsgálva a két oldalt azt kapjuk, hogy a baloldal biztosan pozitív lesz, míg a jobb oldalról nem tudjuk eldönteni egyértelműen, hogy az értéke pozitív vagy negatív. Így két ágat kell megkülönböztetnünk a megoldás során.

I. Ha a jobb oldal negatív. Feltétel: $2-x<0 \quad \rightarrow \quad x>2$

Ekkor az egyenlőtlenség bal oldala egy pozitív szám lesz, míg a jobb oldala egy negatív szám, így minden ilyen feltétel mellett teljesül az egyenlőtlenség. Ezen az ágon tehát a megoldás maga a feltétel: $x>2$.

Ezt összevetve a kezdeti feltétellel a következőt kapjuk: $x>2$.

II. Ha a jobb oldal pozitív. Feltétel: $2-x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 2$

Ekkor az egyenlőtlenség mindkét oldala egy pozitív szám lesz, így elvégezhetjük a négyzetre emelést a reláció megváltoztatása nélkül, s megoldhatjuk az egyenlőtlenséget.

$x^2+4x>4-4x+x^2$

$x>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Ezt összevetve az ág feltételével a következőt kapjuk: $\frac{1}{2}<x \leq 2$.

Ezt összevetve a kezdeti feltétellel a következőt kapjuk: $\frac{1}{2}<x \leq 2$.

Mivel a két ág független egymástól, ezért mindkét ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $\frac{1}{2}<x \leq 2$ vagy $2<x$.

Ez a két közös határszám miatt összevonható: $\frac{1}{2}<x$.

8. Oldd meg a következő abszolútértékes egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\mathbf{3 \cdot |x^2 - 6x + 7| = 5x - 9}$

b) $\mathbf{|x + 3| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 6}$

c) $\mathbf{|2x + 3| - 1 = |2x^2 - x - 1|}$

d) $\mathbf{|x^2 - 5x + 6| = 5x - x^2 - 6}$

e) $\mathbf{|x^2 - 2x - 3| = |x^2 - 2x + 5|}$

Megoldás:

Abszolútértékes egyenleteknél minden abszolútérték esetén két ágat különböztetünk meg: egy pozitívat és egy negatívat. A pozitív ágon az abszolútérték elhagyásakor a kifejezés önmaga marad, míg a negatív ágon annak ellentettje adódik. Több abszolútértéket tartalmazó egyenlet esetén több ágra bomlik a megoldás, aszerint, hogy a feltételek a számegyenest mennyi részre bontják szét.

a) $3 \cdot |x^2 - 6x + 7| = 5x - 9$

Írjuk fel az abszolútérték lehetséges helyettesítéseit:

$$|x^2 - 6x + 7| = \begin{cases} x^2 - 6x + 7, \text{ha } x^2 - 6x + 7 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{6-\sqrt{8}}{2} \text{ vagy } \frac{6+\sqrt{8}}{2} \leq x \\ \\ -x^2 + 6x - 7, \text{ha } x^2 - 6x + 7 < 0 \rightarrow \frac{6-\sqrt{8}}{2} < x < \frac{6+\sqrt{8}}{2} \end{cases}$$

I. Az ág értelmezési tartománya: $x \leq \frac{6-\sqrt{8}}{2}$ vagy $\frac{6+\sqrt{8}}{2} \leq x$.

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$3 \cdot (x^2 - 6x + 7) = 5x - 9$

$3x^2 - 23x + 30 = 0$

A megoldóképlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1 = 6$ és $x_2 = \frac{5}{3}$.

A második eredmény nem felel meg a feltételnek, vagyis a megoldás: $x = 6$.

II. Az ág értelmezési tartománya: $\frac{6-\sqrt{8}}{2} < x < \frac{6+\sqrt{8}}{2}$.

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$3 \cdot (-x^2 + 6x - 7) = 5x - 9$

$3x^2 - 13x + 12 = 0$

A megoldóképlet segítségével kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x_1 = 3$ és $x_2 = \frac{4}{3}$.

A második eredmény nem felel meg a feltételnek, vagyis a megoldás: $x = 3$.

Mivel a két ág független egymástól, ezért mindkét ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $x_1 = 3$ és $x_2 = 6$.

b) $|x+3| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 6$

Alakítsuk át az egyenletet a következőképpen:

$|x+3| + \sqrt{(x-2)^2} = 6$

$|x+3| + |x-2| = 6$

Írjuk fel az abszolútértékek lehetséges helyettesítéseit:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, \text{ha } x+3 \geq 0 \rightarrow \ x \geq -3 \\ -x-3, \text{ha } x+3 < 0 \rightarrow x < -3 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{ha } x-2 \geq 0 \rightarrow \ x \geq 2 \\ -x+2, \text{ha } x-2 < 0 \rightarrow x < 2 \end{cases}$$

Az intervallumokat összevetve, összesen 3 águnk lesz a megoldás során, s mindegyik ágnál el kell döntenünk, hogy az adott feltételnél hogyan hagyjuk el az egyes abszolútértékeket.

I. Az ág értelmezési tartománya: $x < -3$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértékeket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$-x - 3 + (-x + 2) = 6$

$x = -\frac{7}{2}$ → Megfelel az ág feltételének, így ez egy jó megoldás.

II. Az ág értelmezési tartománya: $-3 \leq x < 2$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$x + 3 + (-x + 2) = 6$

$5 \neq 6$ → Ellentmondás: nincs megoldás.

III. Az ág értelmezési tartománya: $x \geq 2$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$x + 3 + x - 2 = 6$

$x = \frac{5}{2}$ → Megfelel az ág feltételének, így ez egy jó megoldás.

Mivel a három ág független egymástól, ezért mindhárom ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $x_1 = -\frac{7}{2}$ és $x_2 = \frac{5}{2}$.

c) $|2x + 3| - 1 = |2x^2 - x - 1|$

Írjuk fel az abszolútértékek lehetséges helyettesítéseit:

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x + 3, \text{ha } 2x + 3 \geq 0 \to \ x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x - 3, \text{ha } 2x + 3 < 0 \to x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$|2x^2 - x - 1| = \begin{cases} 2x^2 - x - 1, \text{ha } 2x^2 - x - 1 \geq 0 \rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \text{ vagy } 1 \leq x \\ -2x^2 + x + 1, \text{ha } 2x^2 - x - 1 < 0 \rightarrow -\frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Az intervallumokat összevetve, összesen 4 águnk lesz a megoldás során, s mindegyik ágnál el kell döntenünk, hogy az adott feltételnél hogyan hagyjuk el az egyes abszolútértékeket.

I. Az ág értelmezési tartománya: $x < -\frac{3}{2}$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértékeket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$-2x - 3 - 1 = 2x^2 - x - 1$

$2x^2 + x + 3 = 0$

A megoldó képlet segítségével azt kapjuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása.

II. Az ág értelmezési tartománya: $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértékeket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$2x + 3 - 1 = 2x^2 - x - 1$

$2x^2 - 3x - 3 = 0$

A megoldó képlet segítségével megkapjuk az egyenlet megoldása $x_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \approx 2{,}18$ és $x_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \approx -0{,}68$.

Az első eredmény nem felel meg a feltételnek, vagyis a megoldás: $x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$.

III. Az ág értelmezési tartománya: $-\frac{1}{2} < x < 1$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértékeket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$2x + 3 - 1 = -2x^2 + x + 1$

$2x^2 + x + 1 = 0$

A megoldó képlet segítségével azt kapjuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása.

IV. Az ág értelmezési tartománya: $x \geq 1$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértékeket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$2x + 3 - 1 = 2x^2 - x - 1$

$2x^2 - 3x - 3 = 0$

Ezt a második ágon már megoldottuk, így az egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \approx 2{,}18$ és $x_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \approx -0{,}68$.

A második eredmény nem felel meg a feltételnek, vagyis a megoldás: $x = \frac{3+ \sqrt{33}}{4}$.

Mivel a négy ág független egymástól, ezért mind a négy ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $x_1 = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \approx -0{,}68$ és $x_2 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \approx 2{,}18$.

d) $|x^2 - 5x + 6| = 5x - x^2 - 6$

Mivel az abszolútértéken belüli kifejezésnek éppen az ellentettje az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés, ezért az abszolútértéken belüli kifejezés nem lehet pozitív.

Ebből a következő adódik: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

Ezek alapján a megoldás: $2 \leq x \leq 3$.

e) $|x^2 - 2x - 3| = |x^2 - 2x + 5|$

Írjuk fel az abszolútértékek lehetséges helyettesítéseit:

$$|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, \text{ha } x^2 - 2x - 3 \geq 0 \rightarrow \; x \leq -1 \text{ vagy } 3 \leq x \\ -x^2 + 2x + 3, \text{ha } x^2 - 2x - 3 < 0 \rightarrow \; -1 < x < 3 \end{cases}$$

$$|x^2-2x+5| = \begin{cases} x^2-2x+5, \text{ha } x^2-2x+5 \geq 0 \\ -x^2+2x-5, \text{ha } x^2-2x+5 < 0 \end{cases}$$

Mivel a megoldó képlet segítségével a második esetben nem kapunk megoldást, ezért ez azt jelenti, hogy a függvényünk nem fogja metszeni sehol az x tengelyt. Ekkor, mivel az x^2 együtthatója egy pozitív szám, az x^2 függvény görbéje a transzformációk után mindig pozitív értéket fog felvenni.

Emiatt a második abszolútértéket elhagyhatjuk az eredeti egyenletünkből, s a következő egyenlet adódik: $|x^2-2x-3| = x^2-2x+5$.

I. Az ág értelmezési tartománya: $x \leq -1$ vagy $3 \leq x$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértékeket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$x^2-2x-3 = x^2-2x+5$

$-3 \neq 5$ → Ellentmondás: nincs megoldás.

II. Az ág értelmezési tartománya: $-1 < x < 3$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértékeket, majd oldjuk meg az egyenletet.

$-x^2+2x+3 = x^2-2x+5$

$x^2-2x+1 = 0$

$x = 1$ → Megfelel az ág feltételének, így ez egy jó megoldás.

Mivel a két ág független egymástól, ezért mind a két ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $x = 1$.

9. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{x > |x^2-2x|}$

b) $\boldsymbol{|x^2-2x-3| < 3x-3}$

c) $\boldsymbol{|x-6| > |x^2-5x+9|}$

Megoldás:
Az abszolútértékes egyenlőtlenségeknél hasonlóan kell eljárnunk, mint az egyenleteknél: a megoldás során az egyenlőtlenségeket több ágra bontjuk.

a) $x > |x^2 - 2x|$

Írjuk fel az abszolútérték lehetséges helyettesítéseit:

$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ha } x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow \ x \leq 0 \text{ vagy } 2 \leq x \\ -x^2 + 2x, \text{ha } x^2 - 2x < 0 \rightarrow \ 0 < x < 2 \end{cases}$$

I. Az ág értelmezési tartománya: $x \leq 0$ vagy $2 \leq x$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket és oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

$x > x^2 - 2x$

$x^2 - 3x < 0$

Ebből a következőt kapjuk: $0 < x < 3$.

Ezt összevetve az ág feltételével a következő adódik: $2 \leq x < 3$.

II. Az ág értelmezési tartománya: $0 < x < 2$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket és oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

$x > -x^2 + 2x$

$x^2 - x > 0$

Ebből a következőt kapjuk: $x < 0$ vagy $1 < x$.

Ezt összevetve az ág feltételével a következő adódik: $1 < x < 2$.

Mivel a két ág független egymástól, ezért mindkét ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $1 < x < 2$ és $2 \leq x < 3$.

Ez a két közös határszám miatt összevonható: $1 < x < 3$.

b) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$

Írjuk fel az abszolútérték lehetséges helyettesítéseit:

$$|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, \text{ha } x^2 - 2x - 3 \geq 0 \rightarrow \ x \leq -1 \text{ vagy } 3 \leq x \\ -x^2 + 2x + 3, \text{ha } x^2 - 2x - 3 < 0 \rightarrow \ -1 < x < 3 \end{cases}$$

I. Az ág értelmezési tartománya: $x \leq -1$ vagy $3 \leq x$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket és oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

$x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$

$x^2 - 5x < 0$

Ebből a következőt kapjuk: $0 < x < 5$.

Ezt összevetve az ág feltételével a következő adódik: $3 \leq x < 5$.

II. Az ág értelmezési tartománya: $-1 < x < 3$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket és oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

$-x^2 + 2x + 3 < 3x - 3$

$x^2 + x - 6 > 0$

Ebből a következőt kapjuk: $x < -3$ vagy $2 < x$.

Ezt összevetve az ág feltételével a következő adódik: $2 < x < 3$.

Mivel a két ág független egymástól, ezért mindkét ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $2 < x < 3$ és $3 \leq x < 5$.

Ez a két közös határszám miatt összevonható: $2 < x < 5$.

c) $|x-6| > |x^2-5x+9|$

Írjuk fel az abszolútértékek lehetséges helyettesítéseit:

$$|x-\ 6| = \begin{cases} x-6, \text{ha } x-6 \geq 0 \rightarrow\ x \geq 6 \\ -x+6, \text{ha } x-6 < 0 \rightarrow\ x < 6 \end{cases}$$

$$|x^2-5x+9| = \begin{cases} x^2-5x+9, \text{ha } x^2-5x+9 \geq 0 \\ -x^2+5x-9, \text{ha } x^2-5x+9 < 0 \end{cases}$$

Mivel a megoldó képlet segítségével a második esetben nem kapunk megoldást, ezért ez azt jelenti, hogy a függvényünk nem fogja metszeni sehol az x tengelyt. Ekkor, mivel az x^2 együtthatója egy pozitív szám, az x^2 függvény görbéje a transzformációk után mindig pozitív értéket fog felvenni. Emiatt a második abszolútértéket elhagyhatjuk az eredeti egyenlőtlenségünkből, s a következő egyenlőtlenség adódik: $|x-6| > x^2-5x+9$.

I. Az ág értelmezési tartománya: $x \geq 6$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket és oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

$x-6 > x^2-5x+9$

$x^2-6x+15 < 0$

Mivel a megoldó képlet segítségével nem kapunk megoldást, ezért ez azt jelenti, hogy a függvényünk nem fogja metszeni sehol az x tengelyt. Ekkor, mivel az x^2 együtthatója egy pozitív szám, az x^2 függvény görbéje a transzformációk után mindig pozitív értéket fog felvenni. Ebből azt kapjuk, hogy az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

II. Az ág értelmezési tartománya: $x < 6$

Hagyjuk el az ágnak megfelelően az abszolútértéket és oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

$-x+6 > x^2-5x+9$

$x^2-4x+3 < 0$

Ebből a következőt kapjuk: $1 < x < 3$.

Ezt összevetve az ág feltételével a következő adódik: $1 < x < 3$.

Mivel a két ág független egymástól, ezért mindkét ág megoldása megfelelő lesz.

Ezek alapján a végső megoldás: $1 < x < 3$.