Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek (ahol $a \neq 0$) gyökei x_1 és x_2 (nem feltétlenül különböző) valós számok, akkor a gyökök és az együtthatók között fennállnak a következő összefüggések: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Bizonyítás:
A megoldó képlet segítségével írjuk fel a megoldásokat általános alakban:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Helyettesítsük ezeket a Viete – formulákba és rendezés után adódik a bizonyítandó állítás:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

■

TÉTEL:
Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek (ahol $a \neq 0$) léteznek x_1 és x_2 (nem feltétlenül különböző) valós gyökei, akkor az egyenlet felírható a következő alakban: $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$. Ezt az alakot az egyenlet gyöktényezős alakjának nevezzük.

Bizonyítás:
Tekintsük a másodfokú egyenlet általános alakját: $ax^2 + bx + c = 0$.

Alakítsuk úgy, hogy az x^2 előtt ne álljon tag, vagyis osszuk el a - val: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Helyettesítsük be a Viete – formulákat és rendezés után adódik a bizonyítandó állítás:

$$x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 x_2 = 0$$

$$x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = 0$$

$$x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1) = 0$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0.$$

■