Megoldások

1. Oldd meg a következő egyenleteket szorzattá alakítással! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{x^2+7x+10=0}$

b) $\boldsymbol{2x^2+2x-24=0}$

Megoldás:
A tagok szétbontása után, kiemeléssel alakítsuk szorzattá az egyenletben szereplő kifejezést.

a) $x^2+7x+10=0$

Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát a következőképpen:

$x^2+7x+10=x^2+2x+5x+10=x\cdot(x+2)+5\cdot(x+2)=(x+2)\cdot(x+5)$

Az egyenlet tehát felírható a következő alakban is: $(x+2)\cdot(x+5)=0$.

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ezek alapján a megoldások:

$x+2=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-2$

$x+5=0 \quad \rightarrow \quad x_2=-5$

b) $2x^2+2x-24=0$

Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát a következőképpen:

$2x^2+2x-24=2\cdot(x^2+x-12)=2\cdot(x^2+4x-3x-12)=$

$=2\cdot[x\cdot(x+4)-3\cdot(x+4)]=2\cdot(x+4)\cdot(x-3)$

Az egyenlet tehát felírható a következő alakban is: $2\cdot(x+4)\cdot(x-3)=0$.

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ezek alapján a megoldások:

$x+4=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-4$

$x-3=0 \quad \rightarrow \quad x_2=3$

2. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{2x^2 + 8x + 6 = 0}$

b) $\boldsymbol{x^2 - 3x + 2 = 0}$

Megoldás:

a) $2x^2 + 8x + 6 = 0$

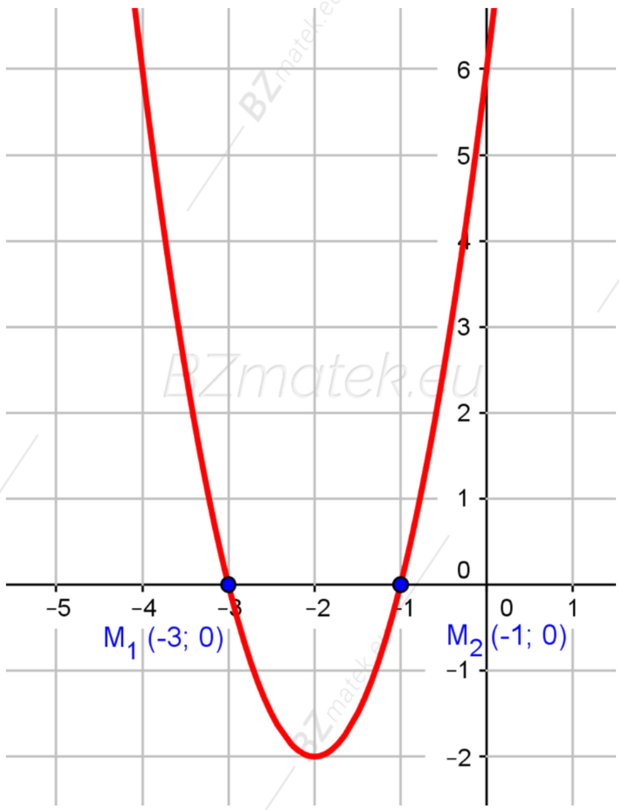
Alakítsuk teljes négyzetté az egyenlet bal oldalát a következőképpen:

$2x^2 + 8x + 6 = 2 \cdot (x^2 + 4x + 3) = 2 \cdot [(x+2)^2 - 4 + 3] = 2 \cdot [(x+2)^2 - 1] =$

$= 2 \cdot (x+2)^2 - 2.$

Az egyenlet tehát felírható a következő alakban is: $2 \cdot (x+2)^2 - 2 = 0.$

Ábrázoljuk az egyenlet bal oldalát a másodfokú függvény transzformációjaként:



Az ábráról leolvasható a függvény x – tengellyel vett két metszéspontja, s ezek az egyenlet megoldásai: $x_1 = -3$ és $x_2 = -1$.

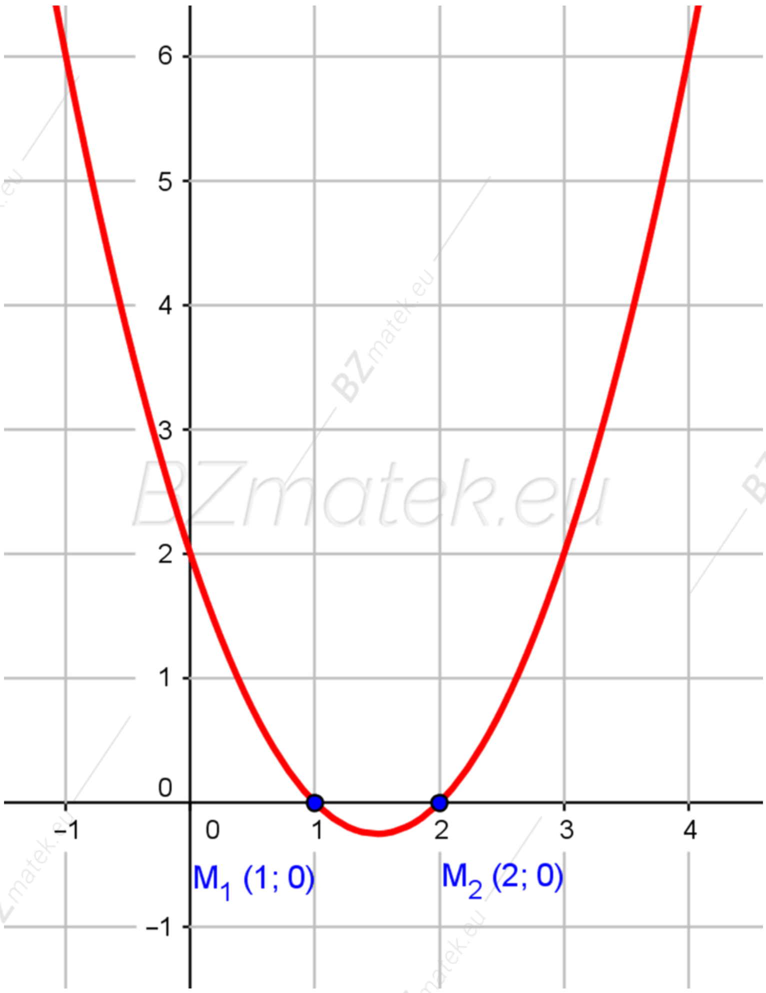
b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Alakítsuk teljes négyzetté az egyenlet bal oldalát a következőképpen:

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Az egyenlet tehát felírható a következő alakban is: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$.

Ábrázoljuk az egyenlet bal oldalát a másodfokú függvény transzformációjaként:



Az ábráról leolvasható a függvény x – tengellyel vett két metszéspontja, s ezek az egyenlet megoldásai: $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.

3. Oldd meg a következő hiányos egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{x^2 - 121 = 0}$

b) $\boldsymbol{5x^2 - 20x = 0}$

Megoldás:

a) $x^2 - 121 = 0$

A megoldás megkapható a megoldóképlet segítségével is, ekkor az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 1; b = 0; c = -121$.

Mivel az egyenlet hiányos ($b = 0$), ezért célszerű egy rövidebb megoldást alkalmazni.

Rendezzük úgy az egyenletet, hogy csak x^2 maradjon az egyik oldalon:

$x^2 = 121$

Ezek alapján a megoldások: $x_1 = 11$ és $x_2 = -11$.

b) $5x^2 - 20 = 0$

A megoldás megkapható a megoldóképlet segítségével is, ekkor az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 5; b = -20; c = 0$.

Mivel az egyenlet hiányos ($c = 0$), ezért célszerű egy rövidebb megoldást alkalmazni.

Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát kiemeléssel:

$5x \cdot (x - 4) = 0$

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ezek alapján a megoldások:

$5x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0$

$x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = 4$

4. Oldd meg a következő egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{8x^2 - 8 = -12x}$

b) $\boldsymbol{\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x = 2}$

c) $\boldsymbol{(2x+1) \cdot (x-2) = x^2 + 2x - 8}$

d) $\boldsymbol{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{8}x + \sqrt{2}x^2\right) + 6x^2 - 28 = (1-3x)^2 + \left(1+\sqrt{5}\right) \cdot \left(1-\sqrt{5}\right)}$

Megoldás:
A megoldóképlet felírása előtt redukáljuk 0 - ra az egyenleteket.

a) $8x^2 - 8 = -12x$

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

Az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 2;\ b = 3; c = -2$.

Írjuk fel a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Ezek alapján a megoldások: $x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ és $x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$.

b) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x = 2$

$10x^2 - 3x - 30 = 0$

Az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 10;\ b = -3; c = -10$.

Írjuk fel a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-30)}}{2 \cdot 10} = \frac{3 \pm \sqrt{1209}}{20} \approx \frac{3 \pm 34{,}77}{20}$$

Ezek alapján a megoldások: $x_1 = \frac{3 + 34{,}77}{20} \approx 1{,}89$ és $x_2 = \frac{3 - 34{,}77}{20} \approx -1{,}59$.

c) $(2x+1)\cdot(x-2) = x^2 + 2x - 8$

$2x^2 - 4x + x - 2 = x^2 + 2x - 8$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 1;\ b = -5; c = 6$.

Írjuk fel a megoldóképletet:

$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Ezek alapján a megoldások: $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ és $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$.

d) $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8}x + \sqrt{2}x^2\right) + 6x^2 - 28 = (1-3x)^2 + \left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)$

$4x + 2x^2 + 6x^2 - 28 = 1 - 6x + 9x^2 + 1 - 5$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

Az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 1;\ b = -10; c = 25$.

Írjuk fel a megoldóképletet:

$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 25}}{2\cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2}$

Ezek alapján a megoldás: $x = \frac{10}{2} = 5$.

5. Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{3x+1}{8} = 2$

b) $\frac{3x^2-2x}{5x} - \frac{4-3x}{x} = x$

c) $\frac{8x-5}{2x+5} = 4 - \frac{3x+10}{3x+2}$

d) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{64}{x^2-16}$

Megoldás:

Először az értelmezési tartományt kell megvizsgálnunk: a nevező értéke nem lehet 0, mert a 0 – val való osztást nem értelmezzük. Ezt követően a megoldás során közös nevezőre kell hoznunk a törteket, melynek meghatározásához azokat alakítsuk szorzattá. Ezután szorozzuk be mindkét oldalt a közös nevezővel, majd redukáljuk 0 – ra az egyenletet. Végül a kapott megoldást ellenőriznünk kell, hogy megfelel - e az értelmezési tartománynak.

a) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{3x+1}{8} = 2$

Az egyenlet megoldása:

$$\frac{2\cdot(x-1)^2}{8} - \frac{3x+1}{8} = 2$$

$$2\cdot(x^2-2x+1)-(3x+1) = 16$$

$$2x^2-4x+2-3x-1-16 = 0$$

$$2x^2-7x-15 = 0$$

Az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 2;\ b = -7; c = -15$.

Írjuk fel a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot2\cdot(-15)}}{2\cdot2} = \frac{7\pm\sqrt{169}}{4} = \frac{7\pm13}{4}$$

Ezek alapján a megoldások: $x_1 = \frac{7+13}{4} = 5$ és $x_2 = \frac{7-13}{4} = -\frac{3}{2}$.

b) $\frac{3x^2 - 2x}{5x} - \frac{4 - 3x}{x} = x$

Feltétel: $5x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 0$

$x \neq 0$

Az egyenlet megoldása:

$$\frac{3x^2 - 2x}{5x} - \frac{5 \cdot (4 - 3x)}{5x} = x$$

$$3x^2 - 2x - (20 - 15x) = 5x^2$$

$$3x^2 - 2x - 20 + 15x - 5x^2 = 0$$

$$2x^2 - 13x + 20 = 0$$

Az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 2;\ b = -13; c = 20$.

Írjuk fel a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}$$

Ezek alapján a megoldások: $x_1 = \frac{13 + 3}{4} = 4$ és $x_2 = \frac{13 - 3}{4} = \frac{5}{2}$.

Mindkét eredmény megfelel a feltételnek.

c) $\frac{8x - 5}{2x + 5} = 4 - \frac{3x + 10}{3x + 2}$

Feltétel: $2x + 5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -\frac{5}{2}$

$3x + 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -\frac{2}{3}$

Az egyenlet megoldása:

$$\frac{(8x-5)\cdot(3x+2)}{(2x+5)\cdot(3x+2)} = 4 - \frac{(3x+10)\cdot(2x+5)}{(2x+5)\cdot(3x+2)}$$

$$(8x-5)\cdot(3x+2) = 4\cdot(2x+5)\cdot(3x+2) - (3x+10)\cdot(2x+5)$$

$$24x^2 + 16x - 15x - 10 = 24x^2 + 16x + 60x + 40 - 6x^2 - 15x - 20x - 50$$

$$6x^2 - 45x = 0$$

$$x\cdot(6x-45) = 0$$

Egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ezek alapján a megoldások:

$x_1 = 0$

$6x - 45 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{15}{2}$

Mindkét eredmény megfelel a feltételnek.

d) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{64}{x^2-16}$

Feltétel: $x - 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 4$

$x + 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -4$

$x^2 - 16 \neq 0 \quad \rightarrow \quad (x-4)\cdot(x+4) \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 4$ és $x \neq -4$

Az egyenlet megoldása:

$$\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{64}{(x-4)\cdot(x+4)}$$

$$\frac{(x+4)\cdot(x+4)}{(x-4)\cdot(x+4)}+\frac{(x-4)\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x+4)}=\frac{64}{(x-4)\cdot(x+4)}$$

$$(x+4)\cdot(x+4)+(x-4)\cdot(x-4)=64$$

$$x^2+8x+16+x^2-8x+16=64$$

$$x^2=16$$

Ezek alapján a megoldások: $x_1=4$ és $x_2=-4$.

Mivel egyik eredmény sem felel meg a feltételnek, így nincs megoldása az egyenletnek.

6. Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\boldsymbol{\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{2x-x^2}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0}$

b) $\boldsymbol{\frac{x}{x-10}-\frac{8}{x-6}=\frac{4x}{x^2-16x+60}}$

<u>Megoldás:</u>

a) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{2x-x^2}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$

Feltétel: $x^2-4\neq 0 \quad\rightarrow\quad (x-2)\cdot(x+2)\neq 0 \quad\rightarrow\quad x\neq 2$ és $x\neq -2$

$2x-x^2\neq 0 \quad\rightarrow\quad x\cdot(2-x)\neq 0 \quad\rightarrow\quad x\neq 0$ és $x\neq 2$

$x^2+2x\neq 0 \quad\rightarrow\quad x\cdot(x+2)\neq 0 \quad\rightarrow\quad x\neq 0$ és $x\neq -2$

Az egyenlet megoldása:

$$\frac{2}{(x-2)\cdot(x+2)}+\frac{1}{x\cdot(2-x)}+\frac{x-4}{x\cdot(x+2)}=0$$

$$\frac{2}{(x-2)\cdot(x+2)}-\frac{1}{x\cdot(x-2)}+\frac{x-4}{x\cdot(x+2)}=0$$

$$\frac{2x}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}-\frac{x+2}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}+\frac{(x-4)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=0$$

$$2x-(x+2)+(x-4)\cdot(x-2)=0$$

$$2x-x-2+x^2-2x-4x+8=0$$

$$x^2-5x+6=0$$

Az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a=1;\ b=-5; c=6$.

Írjuk fel a megoldóképletet:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

Ezek alapján a megoldások: $x_1=\frac{5+1}{2}=3$ és $x_2=\frac{5-1}{2}=2$.

Mivel az x_2 nem felel meg a feltételnek, így az egyenlet megoldása: $x=3$.

b) $\frac{x}{x-10}-\frac{8}{x-6}=\frac{4x}{x^2-16x+60}$

Feltétel: $x-10\neq0 \quad\rightarrow\quad x\neq10$

$x-6\neq0 \quad\rightarrow\quad x\neq6$

$x^2-16x+60\neq0 \quad\rightarrow\quad (x-6)\cdot(x-10)\neq0 \quad\rightarrow x\neq6$ és $x\neq10$

Az egyenlet megoldása:

$$\frac{x}{x-10}-\frac{8}{x-6}=\frac{4x}{(x-6)\cdot(x-10)}$$

$$\frac{x\cdot(x-6)}{(x-6)\cdot(x-10)}-\frac{8\cdot(x-10)}{(x-6)\cdot(x-10)}=\frac{4x}{(x-6)\cdot(x-10)}$$

$x \cdot (x-6) - 8 \cdot (x-10) = 4x$

$x^2 - 6x - 8x + 80 = 4x$

$x^2 - 18x + 80 = 0$

Az egyenletből a következő értékeket kapjuk: $a = 1;\ b = -18; c = 80$.

Írjuk fel a megoldóképletet:

$x_{1,2} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 80}}{2 \cdot 1} = \frac{18 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{18 \pm 2}{2}$

Ezek alapján a megoldások: $x_1 = \frac{18+2}{2} = 10$ és $x_2 = \frac{18-2}{2} = 8$.

Mivel az x_1 nem felel meg a feltételnek, így az egyenlet megoldása: $x = 8$.