

Egyenletek, egyenlőtlenségek V.

DEFINÍCIÓ: (Másodfokú egyenlet)

Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakban felírható egyenletet ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$), ahol x a változó, másodfokú egyenletnek nevezzük.

TÉTEL:

Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökei a következő megoldó képlettel adhatóak meg: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Megjegyzés:

- Az $ax^2 + bx + c$ polinomban az $a - t$ a polinom főegyütthatójának nevezzük.
- Amennyiben $b = 0$, vagy $c = 0$, akkor hiányos másodfokú egyenletről beszélünk.
- Mivel az egyenletet beszorozhatjuk, eloszthatjuk egy tetszőleges számmal, ezért a megoldóképlet felírása előtt célszerű megvizsgálnunk, hogy az egyenlet egyszerűbb alakra hozható - e.
- Az egyenletet célszerű úgy rendezni, hogy az x^2 együtthatója pozitív legyen.
- A megoldóképlet használata során, ha a négyzetgyök értéke egy irracionális szám, akkor kerekített értékkel számolunk tovább.
- A megoldóképlet használata során, ha a négyzetgyök alatt 0 áll, akkor egy megoldása lesz az egyenletnek, ha pedig a négyzetgyök alatt egy negatív szám áll, akkor nem lesz megoldása az egyenletnek.
- Az egyenletek megoldására vannak további módszerek is (pl.: behelyettesítjük az alaphalmaz elemeit; szorzattá alakítunk, s egy szorzat értéke akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla; ábrázoljuk grafikusán a függvény képét teljes négyzetté alakítással), de ezek sokszor körülményesek és nem mindig alkalmazhatóak.

Másodfokú függvény szélsőértéke:

A szélsőérték meghatározásához előbb teljes négyzetté kell alakítanunk a másodfokú kifejezést:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Ha az $a > 0$, akkor a függvény képe egy felfelé nyíló parabola, így a szélsőérték minimum, ha az $a < 0$, akkor a függvény képe egy lefelé nyíló parabola, így a szélsőérték maximum.

A szélsőérték helye $x = -\frac{b}{2a}$, az értéke pedig $y = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. **(K)** Oldd meg a következő egyenleteket szorzattá alakítással! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^2 + 7x + 10 = 0$

b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

2. **(K)** Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $2x^2 + 8x + 6 = 0$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

3. **(K)** Oldd meg a következő hiányos egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $x^2 - 121 = 0$

b) $5x^2 - 20x = 0$

4. **(K)** Oldd meg a következő egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

a) $8x^2 - 8 = -12x$

b) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x = 2$

c) $(2x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 + 2x - 8$

d) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{8}x + \sqrt{2}x^2) + 6x^2 - 28 = (1 - 3x)^2 + (1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})$

5. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{3x+1}{8} = 2$$

$$b) \frac{3x^2 - 2x}{5x} - \frac{4 - 3x}{x} = x$$

$$c) \frac{8x-5}{2x+5} = 4 - \frac{3x+10}{3x+2}$$

$$d) \frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{64}{x^2-16}$$

6. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz: \mathbb{R})

$$a) \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{2x-x^2} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$$

$$b) \frac{x}{x-10} - \frac{8}{x-6} = \frac{4x}{x^2-16x+60}$$

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (6) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (9) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (11) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (12) Saját anyagok