Megoldások

1. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket behelyettesítő módszerrel! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x + y = 4} \\ \boldsymbol{4x + 3y = 6} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{7x - 2y = 12} \\ \boldsymbol{4x + 6y = 14} \end{array}\right\}$

Megoldás:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ 4x + 3y = 6 \end{array}\right\}$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $y = 4 - 2x$.

Ezt helyettesítsük a második egyenletbe: $4x + 3 \cdot (4 - 2x) = 6$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $x = 3$.

A kapott értéket helyettesítsük vissza: $y = 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(3;\ -2)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 7x - 2y = 12 \\ 4x + 6y = 14 \end{array}\right\}$

A második egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x = \frac{7 - 3y}{2}$.

Ezt helyettesítsük az első egyenletbe: $7 \cdot \frac{7 - 3y}{2} - 2y = 12$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $y = 1$.

A kapott értéket helyettesítsük vissza: $x = \frac{7 - 3 \cdot 1}{2} = 2$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(2;\ 1)$.

2. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket összehasonlító módszerrel! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{x+2y=17} \\ \boldsymbol{x-y=11} \end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{5x-2y=19} \\ \boldsymbol{3x-10y=-15} \end{matrix}\right\}$

<u>Megoldás:</u>

a) $\left.\begin{matrix} x+2y=17 \\ x-y=11 \end{matrix}\right\}$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x=17-2y$.

A második egyenletből fejezzük ki ugyanazt az ismeretlent: $x=11+y$.

Mivel a két egyenlet bal oldala megegyezik, így a jobb oldalaknak is meg kell egyezniük.

Írjuk fel a következő egyenletet: $17-2y=11+y$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $y=2$.

A kapott értéket helyettesítsük vissza: $x=11+2=13$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(13;2)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = 19 \\ 3x - 10y = -15 \end{array}\right\}$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x = \frac{19 + 2y}{5}$.

A második egyenletből fejezzük ki ugyanazt az ismeretlent: $x = \frac{-15 + 10y}{3}$.

Mivel a két egyenlet bal oldala megegyezik, így a jobb oldalaknak is meg kell egyezniük.

Írjuk fel a következő egyenletet: $\frac{19 + 2y}{5} = \frac{-15 + 10y}{3}$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $y = 3$.

A kapott értéket helyettesítsük vissza: $x = \frac{19 + 2 \cdot 3}{5} = 5$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(5; 3)$.

3. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket egyenlő együtthatók módszerrel! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{aligned} -3x+5y&=-4 \\ 4x+3y&=15 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 12x+16y+1&=0 \\ 15x+20y+10&=0 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2\cdot(x+y)+4\cdot(x-y)&=3 \\ 3\cdot(x+y)+6\cdot(x-y)&=4,5 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} \frac{x+3}{2}-\frac{y-2}{3}&=2 \\ \frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{3}&=4 \end{aligned}\right\}$

<u>Megoldás:</u>

a) $\left.\begin{aligned} -3x+5y&=-4 \\ 4x+3y&=15 \end{aligned}\right\}$

Szorozzuk be az első egyenletet 4 – gyel, a másodikat pedig 3 – mal.

$\left.\begin{aligned} -12x+20y&=-16 \\ 12x+9y&=45 \end{aligned}\right\}$

Adjuk össze a két egyenletet: $29y=29$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $y=1$.

Ezt helyettesítsük vissza az eredeti egyenletek egyikébe: $-3x+5\cdot 1=-4$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $x=3$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(3;1)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 12x + 16y + 1 = 0 \\ 15x + 20y + 10 = 0 \end{array}\right\}$

Rendezzük úgy az egyenleteket, hogy az általános alakot kapjuk.

$\left.\begin{array}{r} 12x + 16y = -1 \\ 15x + 20y = -10 \end{array}\right\}$

Szorozzuk az első egyenletet 5 – tel, a másodikat pedig 4 – gyel.

$\left.\begin{array}{r} 60x + 80y = -5 \\ 60x + 80y = -40 \end{array}\right\}$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat: $0 \neq 35$.

Ellentmondást kaptunk, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása.

c) $\left.\begin{array}{r} 2 \cdot (x + y) + 4 \cdot (x - y) = 3 \\ 3 \cdot (x + y) + 6 \cdot (x - y) = 4{,}5 \end{array}\right\}$

Rendezzük úgy az egyenleteket, hogy az általános alakot kapjuk.

$\left.\begin{array}{r} 6x - 2y = 3 \\ 9x - 3y = 4{,}5 \end{array}\right\}$

Szorozzuk az első egyenletet 3 – mal, a másodikat pedig 2 – vel.

$\left.\begin{array}{r} 18x - 6y = 9 \\ 18x - 6y = 9 \end{array}\right\}$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat: $0 = 0$.

Azonosságot kaptunk, így végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek (azonban nem minden számpár lesz jó megoldás).

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $y = 2x - \frac{3}{2}$.

Ezek alapján mindazon számpár megoldás, melyre teljesül a következő: $\left(x; 2x - \frac{3}{2}\right)$.

d) $\left.\begin{array}{l}\frac{x+3}{2}-\frac{y-2}{3}=2\\ \frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{3}=4\end{array}\right\}$

Rendezzük úgy az egyenleteket, hogy az általános alakot kapjuk.

$\left.\begin{array}{l}3\cdot(x+3)-2\cdot(y-2)=12\\ 3\cdot(x-1)+4\cdot(y+1)=48\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}3x-2y=-1\\ 3x+4y=47\end{array}\right\}$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat: $-6y=-48$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $y=8$.

Ezt helyettesítsük vissza az eredeti egyenletek egyikébe: $\frac{x+3}{2}-\frac{8-2}{3}=2$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $x=5$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(5;8)$.

4. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket új ismeretlen bevezetésével! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{8}{y}&=8\\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}&=51\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}\frac{10}{x-5}+\frac{1}{y+2}&=1\\ \frac{25}{x-5}+\frac{3}{y+2}&=2\end{aligned}\right\}$

Megoldás:

a) $\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{8}{y}&=8\\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}&=51\end{aligned}\right\}$

Feltétel: $x \neq 0$ és $y \neq 0$.

Vezessünk be új ismeretleneket: $a = \frac{1}{x}$ és $b = \frac{1}{y}$.

Ekkor a következő egyenletrendszer adódik:

$\left.\begin{aligned}a-8b&=8\\ 5a+4b&=51\end{aligned}\right\}$

Szorozzuk az első egyenletet 5 – tel.

$\left.\begin{aligned}5a-40b&=40\\ 5a+4b&=51\end{aligned}\right\}$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat: $-44b = -11$.

Ebből rendezés után a következő adódik $b = \frac{1}{4}$.

Ezt helyettesítsük vissza a kapott egyenletek egyikébe: $a - 8 \cdot \frac{1}{4} = 8$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $a = 10$.

A kapott értékeket helyettesítsük vissza.

$10 = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad y = 4$

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $\left(\frac{1}{10}; 4\right)$.

A kapott eredmény megfelel a feltételnek, tehát megoldása az egyenletrendszernek.

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{10}{x-5} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{array}\right\}$

Feltétel:

$x - 5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 5$

$y + 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad y \neq -2$

Vezessünk be új ismeretleneket: $a = \frac{1}{x-5}$ és $b = \frac{1}{y+2}$.

Ekkor a következő egyenletrendszer adódik:

$\left.\begin{array}{l} 10a + b = 1 \\ 25a + 3b = 2 \end{array}\right\}$

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $b = 1 - 10a$.

Ezt helyettesítsük a második egyenletbe: $25a + 3 \cdot (1 - 10a) = 2$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $a = \frac{1}{5}$.

A kapott értéket helyettesítsük vissza: $b = 1 - 10 \cdot \frac{1}{5} = -1$.

A kapott értékeket helyettesítsük vissza.

$\frac{1}{5} = \frac{1}{x-5} \quad \rightarrow \quad x = 10$

$-1 = \frac{1}{y+2} \quad \rightarrow \quad y = -3$

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(10; -3)$.

A kapott eredmény megfelel a feltételnek, tehát megoldása az egyenletrendszernek.

5. Oldd meg a következő több ismeretlenes egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x+2y+3z=4} \\ \boldsymbol{x-y-z=3} \\ \boldsymbol{3x-y+2z=5} \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x+2y=5} \\ \boldsymbol{y+2z=8} \\ \boldsymbol{z+2u=11} \\ \boldsymbol{u+2x=6} \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{2x+y=5} \\ \boldsymbol{2y+z=6} \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x+2y-z=0} \\ \boldsymbol{4x-y+3z=0} \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a+2b+c-d=3} \\ \boldsymbol{-a+b-2c+2d=0} \end{aligned}\right\}$

<u>Megoldás:</u>

a) $\left.\begin{aligned} x+2y+3z=4 \\ x-y-z=3 \\ 3x-y+2z=5 \end{aligned}\right\}$

Használjuk először a behelyettesítő módszert.

A második egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x = 3 + y + z$.

Ezt helyettesítsük az első és harmadik egyenletbe.

$$\left.\begin{array}{r} 3 + y + z + 2y + 3z = 4 \\ 3 \cdot (3 + y + z) - y + 2z = 5 \end{array}\right\}$$

Rendezzük úgy az egyenleteket, hogy az általános alakot kapjuk.

$$\left.\begin{array}{r} 3y + 4z = 1 \\ 2y + 5z = -4 \end{array}\right\}$$

Használjuk most az egyenlő együtthatók módszerét.

Szorozzuk az első egyenletet 2 – vel, a másodikat pedig 3 – mal.

$$\left.\begin{array}{r} 6y + 8z = 2 \\ 6y + 15z = -12 \end{array}\right\}$$

A második egyenletből vonjuk ki az elsőt: $7z = -14$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $z = -2$.

Ezt helyettesítsük vissza az előző egyenletek egyikébe: $6y + 8 \cdot (-2) = 2$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $y = 3$.

A kapott értékeket helyettesítsük vissza az első lépésbe: $x = 3 + 3 + (-2) = 4$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(4; 3; -2)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x+2y=5 \\ y+2z=8 \\ z+2u=11 \\ u+2x=6 \end{array}\right\}$

Használjuk először a behelyettesítő módszert.

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $x = 5 - 2y$.

Ezt helyettesítsük a negyedik egyenletbe: $u + 2 \cdot (5 - 2y) = 6$.

Ebből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $u = 4y - 4$.

Ezt helyettesítsük a harmadik egyenletbe: $z + 2 \cdot (4y - 4) = 11$.

Ebből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $z = 19 - 8y$.

Ezt helyettesítsük a második egyenletbe: $y + 2 \cdot (19 - 8y) = 8$.

Ebből rendezés után a következő adódik: $y = 2$.

Ezt visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $x = 1; z = 3$ és $u = 4$.

Ezek alapján az egyenletrendszer megoldása: $(1; 2;\ 3; 4)$.

c) $\left.\begin{matrix} 2x + y = 5 \\ 2y + z = 6 \end{matrix}\right\}$

Mivel 3 ismeretlen van 2 egyenletre, így nem lesz konkrét megoldása a feladatnak.

Használjuk először az egyenlő együtthatók módszerét.

Szorozzuk az első egyenletet 2 – vel.

$\left.\begin{matrix} 4x + 2y = 10 \\ 2y + z = 6 \end{matrix}\right\}$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat: $4x - z = 4$.

Mivel 1 egyenletre maradt 2 ismeretlen, ezért vezessünk be új paramétert: $x = t$.

Ezt helyettesítsük a kapott egyenletbe: $4t - z = 4$.

Ebből fejezzük ki az ismeretlent a paraméter segítségével: $z = 4t - 4$.

Ezt helyettesítsük vissza a második egyenletbe: $2y + 4t - 4 = 6$.

Ebből fejezzük ki az ismeretlent a paraméter segítségével: $y = 5 - 2t$.

Ezek alapján a feladatnak végtelen sok megoldása van: $(t; 5 - 2t; 4t - 4)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.

d) $\left.\begin{aligned} x+2y-z&=0 \\ 4x-y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$

Mivel 3 ismeretlen van 2 egyenletre, így nem lesz konkrét megoldása a feladatnak.

Használjuk először az egyenlő együtthatók módszerét.

Szorozzuk az első egyenletet 4 – gyel.

$\left.\begin{aligned} 4x+8y-4z&=0 \\ 4x-y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat: $9y-7z=0$.

Mivel 1 egyenletre maradt 2 ismeretlen, ezért vezessünk be új paramétert: $y=t$.

Ezt helyettesítsük a kapott egyenletbe: $9t-7z=0$.

Ebből fejezzük ki az ismeretlent a paraméter segítségével: $z=\frac{9}{7}t$.

Ezeket helyettesítsük vissza az első egyenletbe: $x+2t-\frac{9}{7}t=0$.

Ebből fejezzük ki az ismeretlent a paraméter segítségével: $x=-\frac{5}{7}t$.

Ezek alapján a feladatnak végtelen sok megoldása van: $\left(-\frac{5}{7}t;t;\frac{9}{7}t\right)$, ahol $t\in\mathbb{R}$.

e) $\left.\begin{aligned} a + 2b + c - d = 3 \\ -a + b - 2c + 2d = 0 \end{aligned}\right\}$

Mivel 4 ismeretlen van 2 egyenletre, így nem lesz konkrét megoldása a feladatnak.

Használjuk először az egyenlő együtthatók módszerét.

Adjuk össze a két egyenletet: $3b - c + d = 3$.

Mivel 1 egyenletre maradt 3 ismeretlen, ezért vezessünk be új paramétereket: $c = p; d = q$.

Ezt helyettesítsük a kapott egyenletbe: $3b - p + q = 3$.

Ebből fejezzük ki az ismeretlent a paraméterek segítségével: $b = \frac{p}{3} - \frac{q}{3} + 1$.

Ezeket helyettesítsük vissza az első egyenletbe: $a + 2 \cdot \left(\frac{p}{3} - \frac{q}{3} + 1\right) + p - q = 3$.

Ebből fejezzük ki az ismeretlent a paraméterek segítségével: $a = -\frac{5}{3}p + \frac{5}{3}q + 1$.

Ezek alapján a feladatnak végtelen sok megoldása van: $\left(-\frac{5}{3}p + \frac{5}{3}q + 1; \frac{p}{3} - \frac{q}{3} + 1; p; q\right)$, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.

6. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszert, ahol $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ valós paraméterek! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{ax - y + 2 = 0} \\ \boldsymbol{x + y - b = 0} \end{aligned}\right\}$$

<u>Megoldás:</u>

Rendezzük úgy az egyenleteket, hogy az általános alakot kapjuk.

$$\left.\begin{aligned} ax - y &= -2 \\ x + y &= b \end{aligned}\right\}$$

Amennyiben $a = -1$, akkor a két egyenlet bal oldala megegyezik.

Ebből a következő adódik: $b = 2$.

Ezek alapján mindazon számpár megoldás, melyre teljesül a következő: $(x; 2 - x\ )$.

Ha $a \neq -1$, akkor fejezzük ki az ismeretleneket a paraméterek segítségével.

A második egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent a paraméter segítségével: $y = b - x$.

Ezt helyettesítsük az első egyenletbe: $ax - (b - x) = -2$.

Ebből fejezzük ki az ismeretlent a paraméterek segítségével: $x = \frac{b-2}{a+1}$.

A kapott értéket helyettesítsük vissza: $y = b - \frac{b-2}{a+1} = \frac{ab+2}{a+1}$.

Ezek alapján mindazon számpár megoldás, melyre teljesül a következő: $\left(\frac{b-2}{a+1}; \frac{ab+2}{a+1}\right)$.