Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Egyenletek, egyenlőtlenségek III.

Egyenletrendszerek:
Az egyenletrendszerek megoldása során olyan számpárokat, számhármasokat, stb. keresünk, melyek egyszerre több egyenletnek is megoldásai.

Egyenletrendszerek megoldása:
Az egyenletrendszereket úgy oldjuk meg, hogy az egyik ismeretlent kiküszöbölve áttérünk egyetlen ismeretlent tartalmazó egyenletre, majd ezt megoldva, a visszahelyettesítés után megkapjuk az előzőleg elhagyott ismeretlent is.

Az egyenletrendszerek megoldásának módszerei a következők:

- Behelyettesítő módszer: Az egyik egyenletből kifejezzük valamelyik ismeretlent, majd az így kapott alakot behelyettesítjük a másik egyenletbe. Ezt a módszert akkor célszerű használnunk, ha van olyan egyenlet, melyben az egyik ismeretlen együtthatója 1.

- Egyenlő együtthatók módszere: A két egyenletet úgy alakítjuk (szorozzuk, vagy osztjuk egy számmal), hogy az egyik ismeretlen előtt álló együtthatók megegyezzenek, vagy egymás ellentettjei legyenek. Ekkor a két egyenletet összeadva (kivonva) ez az ismeretlen kiesik.

- Összehasonlító módszer: Mindkét egyenletből kifejezzük ugyanazt az ismeretlent, s az így a kapott értékeket egyenlővé tesszük egymással.

- Új ismeretlen bevezetése: Egyszerűbb alakra hozzuk az egyenleteket, s azokat megoldva a kapott eredményeket visszahelyettesítjük az általunk bevezetett ismeretlenek helyére.

A feladat végén a megoldásokat $(x; y)$ számpárként írjuk fel, s az eredeti egyenletekbe való visszahelyettesítéssel ezeket ellenőriznünk kell.

Megjegyzés:

- *A megoldáshoz bármelyik módszert használhatjuk. Ha azonosságot kapunk, akkor végtelen sok megoldás adódik, ahol az y függ az x értékétől. Ellentmondás esetén nincs megoldás.*

- *Az egyenletrendszereket megoldhatjuk grafikusan is. Mindkét egyenletből kifejezzük az y – t és a kapott kifejezéseknek megfelelő egyeneseket ábrázoljuk közös koordináta – rendszerben. A két grafikon közös pontjának koordinátái adják meg az egyenletrendszer megoldását.*

- *Amennyiben több ismeretlen szerepel az egyenletrendszerben, mint egyenlet, akkor vagy végtelen sok megoldása van a feladatnak (amiknek a megadásához be kell vezetnünk új paramétereket), vagy nincs megoldása.*

- *Ha több egyenletünk van, több ismeretlennel, akkor a megoldási módszereket többször is alkalmazva arra törekszünk, hogy egy olyan egyenlethez jussunk, amelyben már csak egy ismeretlen szerepel.*

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket behelyettesítő módszerrel! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=4\\4x+3y=6\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}7x-2y=12\\4x+6y=14\end{array}\right\}$

2. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket összehasonlító módszerrel! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{array}{r}x+2y=17\\x-y=11\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}5x-2y=19\\3x-10y=-15\end{array}\right\}$

3. (K) Oldd meg a következő egyenletrendszereket egyenlő együtthatók módszerrel! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{array}{r}-3x+5y=-4\\4x+3y=15\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}12x+16y+1=0\\15x+20y+10=0\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}2\cdot(x+y)+4\cdot(x-y)=3\\3\cdot(x+y)+6\cdot(x-y)=4,5\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\frac{x+3}{2}-\frac{y-2}{3}=2\\\frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{3}=4\end{array}\right\}$

4. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszereket új ismeretlen bevezetésével! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}-\frac{8}{y}&=8 \\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}&=51 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \frac{10}{x-5}+\frac{1}{y+2}&=1 \\ \frac{25}{x-5}+\frac{3}{y+2}&=2 \end{aligned}\right\}$

5. (E) Oldd meg a következő több ismeretlenes egyenletrendszereket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=4 \\ x-y-z&=3 \\ 3x-y+2z&=5 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+2y&=5 \\ y+2z&=8 \\ z+2u&=11 \\ u+2x&=6 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=5 \\ 2y+z&=6 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x+2y-z&=0 \\ 4x-y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} a+2b+c-d&=3 \\ -a+b-2c+2d&=0 \end{aligned}\right\}$

6. (E) Oldd meg a következő egyenletrendszert, ahol *a* és *b* valós paraméterek! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

$$\left.\begin{aligned} ax-y+2&=0 \\ x+y-b&=0 \end{aligned}\right\}$$

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2001.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(9) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(11) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(12) Saját anyagok