Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek I.

DEFINÍCIÓ: (Nyitott mondat)
Az olyan állítást, amelyben az alany helyén változó szerepel, nyitott mondatnak nevezzük.

Megjegyzés:

- *A nyitott mondatba írt változót ismeretlennek nevezzük.*
- *Ha a változó helyére beírjuk az alaphalmaz valamelyik elemét, akkor a nyitott mondatból ítéletet (kijelentést) kapunk, amelyről egyértelműen eldönthető a logikai értéke, vagyis hogy igaz, vagy sem.*
- *A nyitott mondat az értelmezési tartomány elemeihez egyértelműen az „igaz” vagy a „hamis” logikai értéket rendeli hozzá. A nyitott mondatot logikai függvénynek is nevezzük.*
- *A nyitott mondat megoldásának nevezzük az értelmezési tartománynak valamely elemét, ha a nyitott mondatba helyettesítve igaz állítást kapunk.*

DEFINÍCIÓ: (Egyenlet, egyenlőtlenség)
Az egyenletek (egyenlőtlenségek) speciális nyitott mondatok: két kifejezés egyenlőségjellel (relációs jellel) összekötve, ahol legalább az egyik oldalon változót tartalmazó kifejezés áll.

DEFINÍCIÓ: (Egyenlet alaphalmaza)
Az alaphalmaz az ismeretlenek azon értékeinek halmaza, ahol az egyenletet vizsgáljuk, ahol a megoldásokat keressük.

DEFINÍCIÓ: (Egyenlet értelmezési tartománya)
Az egyenlet értelmezési tartománya az alaphalmaz azon legbővebb részhalmaza, amelyen az egyenletben szereplő kifejezések értelmezettek.

Megjegyzés:

- *Ha az alaphalmaz nincs megadva, akkor az értelmezési tartományt kell annak tekintenünk.*
- *Az egyenlet megoldását másképpen az egyenlet gyökének is nevezzük.*
- *Az egyenlet megoldásinak halmazát igazsághalmaznak (megoldáshalmaznak) nevezzük.*
- *Ha az egyenletnek nincs megoldása az alaphalmazból, akkor ellentmondásról beszélünk.*

DEFINÍCIÓ: (Elsőfokú lineáris egyenlet, egyenlőtlenség)
Az olyan egyenletet (egyenlőtlenséget) amelyben egy ismeretlen fordul elő, legfeljebb az első hatványon, elsőfokú (lineáris) egyismeretlenes egyenletnek (egyenlőtlenségnek) nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Azonosság, azonos egyenlőtlenség)
Ha az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldáshalmaza megegyezik az alaphalmazzal, akkor azonosságról, illetve azonos egyenlőtlenségről beszélünk.

Megjegyzés:

- *Az azonosságok minden esetben igazak lesznek, függetlenül attól, hogy a változónak milyen értéket választunk.*
- *Példa:* $2x + 4 = 2x + 4; |x| > -3; \ldots$

DEFINÍCIÓ: (Ekvivalens egyenletek, egyenlőtlenségek)
Két egyenletet, egyenlőtlenséget ekvivalensnek nevezünk, ha az alaphalmazuk, illetve a megoldáshalmazuk megegyezik.

Megjegyzés:
Az egyenlet (egyenlőtlenség) megoldása során át is alakítjuk azt, s ezt a folyamatot (pl.: zárójelbontás, összevonás, stb.) az egyenlet (egyenlőtlenség) rendezésének nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Ekvivalens átalakítás)
Azt az algebrai átalakítást, amely nem jár gyökvesztéssel (nem veszítünk el megoldást), illetve nem adódik hamisgyök (olyan megoldás, amely az eredeti egyenletnek nem megoldása), ekvivalens átalakításnak nevezzük.

Egyenlet (egyenlőtlenség) megoldásának módszerei:

- grafikusan: a két oldalon szereplő kifejezésre függvényként tekintünk, s azokat ábrázoljuk közös koordináta - rendszerben
- értelmezési tartomány, illetve értékkészlet vizsgálatával: egyszerűsíthetjük a megoldást, kiderülhet, hogy nincs gyök, vagy csak néhány érték felelhet meg
- szorzattá alakítással: a szorzat értékét 0 - hoz viszonyítjuk, mert egy szorzat értéke csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0
- új ismeretlen bevezetésével: az összetett kifejezéseket leegyszerűsítjük, majd meghatározzuk a bevezetett változó értékét, végül megadjuk az eredeti ismeretlen értékét is
- lebontogatás, mérleg – elv: átalakítás után az egyik oldalon csak az ismeretlen szerepel

Mérleg - elv:
Az átrendezések közben ez azt jelenti, hogy ekvivalens átalakítások során az egyenlet mindkét oldalán ugyanazokat a műveleteket hajtjuk végre, a következő feltételeket figyelembe véve:

- az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatjuk, illetve kivonhatjuk ugyanazt a számot

- az egyenlet mindkét oldalát szorozhatjuk, illetve oszthatjuk ugyanazzal a (nem 0) számmal

- ismeretlent tartalmazó tagot is hozzáadhatunk, illetve kivonhatunk, ha az nem változtatja meg az egyenlet alaphalmazát

- ha ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk, akkor hamis gyököket kaphatunk, ha pedig osztunk vele, akkor gyökvesztéshez vezethet (ezért lehetőleg nem alkalmazzuk)

Egyenlőtlenségek megoldásának módszere:
Hasonlóan oldjuk meg, mint az egyenleteket, csak arra kell ügyelnünk, hogy ha negatív számmal szorzunk, illetve osztunk, akkor az egyenlőtlenség irányát az ellenkezőjére kell változtatnunk ahhoz, hogy az egyenlőtlenség megoldáshalmaza változatlan maradjon.

Megjegyzés:
Amennyiben ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk vagy osztunk, akkor gondolnunk kell arra, hogy az lehet pozitív vagy negatív is, tehát ezeket az eseteket külön meg kell vizsgálnunk.

Ellenőrzés:
A lépések során bejöhetnek hamis gyökök, illetve számolási hibát is véthetünk, ezért az egyenlet megoldását minden esetben ellenőriznünk kell az eredeti egyenletbe történő visszahelyettesítéssel. Helyes megoldás esetén a bal oldali helyettesítési érték megegyezik a jobb oldali helyettesítési értékkel.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Oldd meg a következő egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{Z}$)

a) $(x-1)\cdot(x+1)-7x+13=x\cdot(4+x)+2$

b) $1-2\cdot[5\cdot(3x-1)-3\cdot(1+2x)-2-4x]=3\cdot(7-3x)-x$

c) $2\cdot(3x+5)-(x-2)^2+(x+1)^2=6\cdot(2x+1)$

d) $6\cdot(x-8)-3\cdot(2+x)=8\cdot(1+5x)-(9x-7)$

2. (K) Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $2\cdot(2x-3)>5+4x$

b) $(1+x)^2+3x^2\geq(2x-1)^2-18$

c) $30x-4\cdot(8x+1)<7-2x$

3. (E) Oldd meg a következő nem lineáris egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $(x+2y)^2+|5x-10|=0$

b) $|15-y|+\sqrt{5x+y}=0$

c) $(x-3)^2+\sqrt{x+2}=0$

d) $\sqrt{x+5}+|1-y|=-1$

e) $|2x+7|+(3y-6)^2=2$

f) $(x^2-9)\cdot(7x-63)\cdot 8x=0$

g) $(x+4)\cdot(1-y)\cdot 6z=0$

h) $x^2+x-2=0$

i) $\frac{7x+35}{2x-8}=0$

4. (E) Oldd meg a következő nem lineáris egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $(x-4)\cdot(3+x)<0$

b) $5x^2+25x\geq 0$

c) $(x-4)\cdot(3x+3)\cdot(x+7)>0$

5. (K) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $2x-\left(\frac{5}{7}x-\frac{3}{4}x\right)=57$

b) $x-\frac{6-2x}{3}=2x-4-\frac{x+3}{2}$

c) $\frac{7}{5x+5}-\frac{3}{10x+10}=\frac{11}{120}$

d) $\frac{2-6x}{3-x}-\frac{x}{x-3}=3+\frac{3x+4}{x-3}$

e) $\frac{x-1}{5}\cdot\frac{x-3}{x}=\frac{2x+3}{x}+\frac{x}{5}$

6. (E) Oldd meg a következő törtes egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\frac{5x-3}{x^2+3x}-\frac{x+1}{3x^2+9x}+\frac{3}{x}=\frac{2}{x+3}$

b) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{x}{2x-x^2}=\frac{4}{x^2+2x}$

c) $\frac{3}{1-x^2}=\frac{2}{1+2x+x^2}-\frac{5}{1-2x+x^2}$

d) $\frac{2x}{x^3-1}+\frac{x-2}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}$

7. (E) Oldd meg a következő egyenleteket! (Alaphalmaz: $\mathbb{Z}$)

a) $(x+2)^3-(x-2)^3=12\cdot(x^2-x)-8$

b) $\frac{\frac{x}{2}-\frac{2x-1}{3}}{\frac{x}{3}+\frac{3x-1}{2}}=\frac{2}{3}$

8. (K) Oldd meg a következő törtes egyenlőtlenségeket! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

a) $\frac{37-2x}{3}+x \leq \frac{3x-8}{4}-9$

b) $\frac{3x-5}{2}-\frac{2x-1}{3}<-2$

c) $\frac{2}{3-x}>0$

d) $\frac{x+2}{-7} \leq 0$

e) $\frac{2-x}{x-4} \geq 0$

f) $\frac{12-3x}{1-3x}>0$

g) $\frac{3x}{2x+1}>1$

h) $\frac{3-5x}{2x-5} \leq -3$

9. (E) Oldd meg a következő törtes egyenlőtlenséget: $\frac{3}{x+2} \leq \frac{7}{x-5}$! (Alaphalmaz: $\mathbb{R}$)

10. (E) Hogyan válasszuk meg a p valós paraméter értékét, hogy az $5p-6=3\cdot(x-2)$ egyenletnek minden valós szám megoldása legyen?

11. (E) Hogyan válasszuk meg a p valós paraméter értékét, hogy az $\frac{x}{2}-\frac{p+1}{3}=\frac{4x+6}{8}$ egyenletnek ne legyen megoldása?

12. (E) Oldd meg a következő egyenleteket, ahol $p; q; r$ valós paraméter!

a) $(x-2)\cdot p = p\cdot(p+1)$

b) $\frac{2qx}{3}+1=\frac{q+x}{2}-1$

c) $(r^2+r)\cdot x = r^2+2r+1$

13. (E) Add meg az $mx+1 \geq m^2+x$ egyenlőtlenség valós megoldásait, ha az m paraméter természetes szám!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2001.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(9) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $9-10.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(11) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(12) Saját anyagok