Megoldások

1. Számítsd ki a következő emeletes törtek pontos értékét!

$$\frac{5}{1-\frac{4}{3+\frac{2}{4\frac{1}{2}}}} \qquad\qquad 2-\frac{4}{3-\frac{5}{1+\frac{5}{\frac{3}{2}}}}$$

Megoldás:
Az emeletes törteket belülről kifelé haladva bontjuk ki: egy számot egy törttel úgy osztunk, hogy a számot szorozzuk a tört reciprokával.

Ezek alapján a megoldások:

a) $\frac{5}{1-\frac{4}{3+\frac{2}{4\frac{1}{2}}}} = \frac{5}{1-\frac{4}{3+\frac{2}{\frac{9}{2}}}} = \frac{5}{1-\frac{4}{3+\frac{4}{9}}} = \frac{5}{1-\frac{4}{\frac{31}{9}}} = \frac{5}{1-\frac{36}{31}} = \frac{5}{-\frac{5}{31}} = -31$

b) $2-\frac{4}{3-\frac{5}{1+\frac{5}{\frac{3}{2}}}} = 2-\frac{4}{3-\frac{5}{1+\frac{10}{3}}} = 2-\frac{4}{3-\frac{5}{\frac{13}{3}}} = 2-\frac{4}{3-\frac{15}{13}} = 2-\frac{4}{\frac{24}{13}} = 2-\frac{52}{24} = -\frac{4}{24} = -\frac{1}{6}$

2. Határozd meg, hogy a következő algebrai kifejezések közül, melyek egy tagúak; többtagúak; algebrai törtek; algebrai egészek; egyneműek egymással? Határozd meg a kifejezések együtthatóit!

$$\frac{a+b}{c} \qquad -\frac{c}{x} \qquad 7x+8y^7 \qquad \frac{ab^{11}}{3} \qquad \frac{10xy^7}{9} \qquad 2a\cdot 8b^{11} \qquad a-\frac{2}{y}$$

Megoldás:
A fogalmak alapján a megoldások a következők:

Algebrai egészek: $7x+8y^7$ $\quad \frac{ab^{11}}{3}$ $\quad \frac{10xy^7}{9}$ $\quad 2a\cdot 8b^{11}$

Algebrai törtek: $\frac{a+b}{c}$ $\quad -\frac{c}{x}$ $\quad a-\frac{2}{y}$

Egytagú kifejezések: $\frac{a+b}{c}$ $\quad -\frac{c}{x}$ $\quad \frac{ab^{11}}{3}$ $\quad \frac{10xy^7}{9}$ $\quad 2a\cdot 8b^{11}$

Többtagú kifejezések: $7x+8y^7$ $\quad a-\frac{2}{y}$

Egynemű kifejezések: $\frac{ab^{11}}{3}$ $\quad 2a\cdot 8b^{11}$

Együtthatók: 1 $\quad -1$ $\quad 7$ és 8 $\quad \frac{1}{3}$ $\quad \frac{10}{9}$ $\quad 16$ $\quad 1$ és -2

3. Határozd meg a következő polinomok fokszámát!

$\boldsymbol{6a^9b}$ $\quad$ $\mathbf{7}$ $\quad$ $\boldsymbol{-2x+3xy-4xyz}$ $\quad$ $\boldsymbol{10xy^7+20y^2z^2+30xy^2z^3}$

<u>Megoldás:</u>
A fogalmak alapján a megoldások a következők:

$6a^9b$ $\rightarrow$ 10

7 $\rightarrow$ 0

$-2x+3xy-4xyz$ $\rightarrow$ 3 (a tagok fokszáma: 1; 2; 3)

$10xy^7+20y^2z^2+30xy^2z^3$ $\rightarrow$ 8 (a tagok fokszáma: 8; 4; 6)

4. Határozd meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyeken!

a) $\boldsymbol{10xy-3z}$**, ha** $\boldsymbol{x=-0,25;\, y=\frac{2}{5};\, z=-7}$

b) $\boldsymbol{\frac{x+y}{z}-\frac{z}{2}-\frac{3x+1}{y}}$**, ha** $\boldsymbol{x=-2;\, y=3;\, z=4}$

<u>Megoldás:</u>
Helyettesítsük az adott kifejezésbe a változók értékeit:

a) $10\cdot(-0{,}25)\cdot\frac{2}{5}-3\cdot(-7)=-1+21=20$

b) $\frac{-2+3}{4}-\frac{4}{2}-\frac{3\cdot(-2)+1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{4}{2}-\frac{-5}{3}=\frac{3}{12}-\frac{24}{12}+\frac{20}{12}=-\frac{1}{12}$

5. Végezz összevonást a következő kifejezésekben!

$\boldsymbol{a^2+2ab+3a^2-5ab}$ $\quad$ $\boldsymbol{5a+a^2b+4ab^2-b+11a^2b-ab^2+3b^3}$

<u>Megoldás:</u>
Vonjuk össze az egynemű tagokat:

$a^2+2ab+3a^2-5ab=4a^2-3ab$

$5a+a^2b+4ab^2-b+11a^2b-ab^2+3b^3=3b^3+3ab^2+12a^2b+5a-b$

6. Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\boldsymbol{5-(2a+3b)+(a-b+3)}$

b) $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z\right)-\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z\right)}$

c) $\boldsymbol{4a^2-2ab-b^2-(-a^2+b^2-2ab)+(3a^2-ab+b^2)}$

d) $\boldsymbol{\left(\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^3-1\right)-\left(3x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}x^2y-2xy^2\right)}$

e) $\boldsymbol{9a^2+[7a^2-2a-(a^2-3a)]}$

f) $\boldsymbol{3a-\{2c-[6a-(c-b)+c+(a+8b-6c]\}}$

<u>Megoldás:</u>
Először bontsuk fel a zárójeleket: ha a zárójel előtt negatív szerepel, akkor (-1) – gyel szorozzuk a zárójelben levő tagokat. Ezt követően vonjuk össze az egynemű kifejezéseket.

a) $5-(2a+3b)+(a-b+3)=5-2a-3b+a-b+3=-a-4b+8$

b) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z\right)-\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z\right)=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z=$

$=\frac{7}{6}x+\frac{7}{6}y-\frac{9}{20}z$

c) $4a^2-2ab-b^2-(-a^2+b^2-2ab)+(3a^2-ab+b^2)=$

$=4a^2-2ab-b^2+a^2-b^2+2ab+3a^2-ab+b^2=8a^2-b^2-ab$

d) $\left(\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^3-1\right)-\left(3x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}x^2y-2xy^2\right)=$

$=\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^3-1-3x^3+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}x^2y+2xy^2=$

$=-\frac{7}{3}x^3-\frac{5}{2}y^3-\frac{8}{3}x^2y+\frac{9}{4}xy^2-\frac{1}{3}$

e) $9a^2+[7a^2-2a-(a^2-3a)]=9a^2+(7a^2-2a-a^2+3a)=$

$=9a^2+(6a^2+a)=9a^2+6a^2+a=15a^2+a$

f) $3a - \{2c - [6a - (c - b) + c + (a + 8b - 6c]\} =$

$$= 3a - [2c - (6a - c + b + c + a + 8b - 6c)] = 3a - [2c - (7a + 9b - 6c] =$$

$$= 3a - (2c - 7a - 9b + 6c) = 3a - (-7a - 9b + 8c) = 3a + 7a + 9b - 8c =$$

$$= 10a + 9b - 8c$$

7. Számítsd ki a következő hatványok pontos értékét!

$$\mathbf{7^3} \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{5} \qquad (-\mathbf{2})^{4} \qquad -\mathbf{3^2} \qquad \mathbf{8^{-1}} \qquad \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \qquad \mathbf{0,1^{-4}} \qquad \mathbf{1,63^0}$$

Megoldás:
Alkalmazzuk a hatványozás definícióját pozitív, illetve negatív egész kitevőjű hatványokra.

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$

$\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{32}$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

$-3^2 = (-1) \cdot 3 \cdot 3 = -9$

$8^{-1} = \frac{1}{8}$

$\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4}$

$0{,}1^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{1}\right)^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$

$1{,}63^0 = 1$

8. Döntsd el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

A: A negatív egész számok hatványai lehetnek pozitív és negatív értékek is.

B: Az egész számok minden egész kitevőjű hatványa egész.

C: Összeszorozva $-\mathbf{1000}$ – től $\mathbf{1000}$ – ig az egész számokat az eredmény negatív lesz.

Megoldás:
A megoldások a következők: I; H; H.

9. Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

$$\mathbf{2^5 \cdot 2 \cdot 2^4} \qquad \mathbf{(3^2)^3} \qquad \mathbf{\frac{2^7}{2^4}} \qquad \mathbf{(2^2 \cdot 3)^4} \qquad \mathbf{\left(\frac{2}{5}\right)^3} \qquad \mathbf{\frac{3 \cdot 3^3}{(3^2)^{-1}}}$$

Megoldás:
Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait.

$2^5 \cdot 2 \cdot 2^4 = 2^{5+1+4} = 2^{10} = 1024$

$(3^3)^3 = 3^{3 \cdot 3} = 3^9 = 19683$

$\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3 = 8$

$(2^2 \cdot 3)^4 = (2^2)^4 \cdot 3^4 = 2^{2 \cdot 4} \cdot 3^4 = 2^8 \cdot 3^4 = 20736$

$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

$\frac{3 \cdot 3^3}{(3^2)^{-1}} = \frac{3^{1+3}}{3^{2 \cdot (-1)}} = \frac{3^4}{3^{-2}} = 3^{4-(-2)} = 3^6 = 729$

10. Döntsd el számológép használata nélkül, hogy melyik kifejezés értéke nagyobb?

$\mathbf{2^{-2}}$ **vagy** $\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$ $\qquad$ $\mathbf{3^4 + 3^5}$ **vagy** $\mathbf{3^9}$ $\qquad$ $\mathbf{6^{12}}$ **vagy** $\mathbf{12^8}$

$\mathbf{(5^6 + 5^6)^6}$ **vagy** $\mathbf{(25^{10})^2}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{2}{3^{18}} + \frac{4}{3^{19}} - \frac{4}{3^{20}}}$ **vagy** $\mathbf{\frac{1}{3^{17}}}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{7^{-10}}{5^{-1} \cdot 3^{11}}}$ **vagy** $\mathbf{\frac{12 \cdot 3^{-10}}{7^{11}}}$

Megoldás:
Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait.

$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ $\qquad$ $\rightarrow$ $\qquad$ $2^{-2} > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$3^4 + 3^5 = 3^4 \cdot (1 + 3) = 4 \cdot 3^4$ $\qquad$ $3^9 = 3^5 \cdot 3^4$ $\qquad$ $\rightarrow$ $\qquad$ $3^4 + 3^5 < 3^9$

$6^{12} = (2 \cdot 3)^{12} = 2^{12} \cdot 3^{12} = 2^{12} \cdot 3^8 \cdot 3^4$

$12^8 = (2^2 \cdot 3)^8 = 2^{16} \cdot 3^8 = 2^{12} \cdot 3^8 \cdot 2^4$ $\qquad$ $\rightarrow$ $\qquad$ $6^{12} > 12^8$

$(5^6 + 5^6)^6 = (2 \cdot 5^6)^6 = 2^6 \cdot (5^6)^6 = 2^6 \cdot 5^{36}$

$(25^{10})^2 = 25^{20} = (5^2)^{20} = 5^{40} = 5^4 \cdot 5^{36}$ $\qquad$ $\rightarrow$ $\qquad$ $(5^6 + 5^6)^6 < (25^3)^2$

$$\frac{2}{3^{18}}+\frac{4}{3^{19}}-\frac{4}{3^{20}}=\frac{2\cdot 3^2}{3^{20}}+\frac{4\cdot 3}{3^{20}}-\frac{4}{3^{20}}=\frac{26}{3^{20}}$$

$$\frac{1}{3^{17}}=\frac{3^3}{3^{20}}=\frac{27}{3^{20}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{2}{3^{18}}+\frac{4}{3^{19}}-\frac{4}{3^{20}}<\frac{1}{3^{17}}$$

$$\frac{7^{-10}}{5^{-1}\cdot 3^{11}}=\frac{5}{7^{10}\cdot 3^{11}}=\frac{5\cdot 7}{7^{11}\cdot 3^{11}}=\frac{35}{7^{11}\cdot 3^{11}}$$

$$\frac{12\cdot 3^{-10}}{7^{11}}=\frac{12}{7^{11}\cdot 3^{10}}=\frac{12\cdot 3}{7^{11}\cdot 3^{11}}=\frac{36}{7^{11}\cdot 3^{11}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{7^{-10}}{5^{-1}\cdot 3^{11}}<\frac{12\cdot 3^{-10}}{7^{11}}$$

11. Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések értékét!

$$\frac{5^5\cdot\left(5^3\right)^8\cdot\left(5\cdot 3^7\right)^4\cdot 3^{45}}{5^{29}\cdot 3^9\cdot\left(3^6\right)^{11}} \qquad \frac{\left(2^{-3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot 8^{-1}} \qquad \frac{5^{2017}\cdot 2^{2018}}{10^{2019}}$$

$$\frac{1000^{-3}\cdot\left(100^4\right)^5}{10^{31}} \qquad \frac{480\cdot 144}{64}:360 \qquad \frac{2^9\cdot 3^8-6^8+2^8\cdot 3^7}{2^{10}+2^{11}}$$

Megoldás:

Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait.

$$\frac{5^5\cdot\left(5^3\right)^8\cdot\left(5\cdot 3^7\right)^4\cdot 3^{45}}{5^{29}\cdot 3^9\cdot\left(3^6\right)^{11}}=\frac{5^5\cdot 5^{24}\cdot 5^4\cdot 3^{28}\cdot 3^{45}}{5^{29}\cdot 3^9\cdot 3^{66}}=\frac{5^{33}\cdot 3^{73}}{5^{29}\cdot 3^{75}}=\frac{5^4}{3^2}=\frac{625}{9}$$

$$\frac{\left(2^{-3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot 8^{-1}}=\frac{2^{-12}\cdot 2^5}{\left(2^{-2}\right)^3\cdot\left(2^3\right)^{-1}}=\frac{2^{-7}}{2^{-6}\cdot 2^{-3}}=\frac{2^{-7}}{2^{-9}}=2^2=4$$

$$\frac{5^{2017}\cdot 2^{2018}}{10^{2019}}=\frac{5^{2017}\cdot 2^{2018}}{(5\cdot 2)^{2019}}=\frac{5^{2017}\cdot 2^{2018}}{5^{2019}\cdot 2^{2019}}=\frac{1}{5^2\cdot 2^1}=\frac{1}{50}$$

$$\frac{1000^{-3}\cdot\left(100^4\right)^5}{10^{31}}=\frac{\left(10^3\right)^{-3}\cdot\left[\left(10^2\right)^4\right]^5}{10^{31}}=\frac{10^{-9}\cdot 10^{40}}{10^{31}}=\frac{10^{31}}{10^{31}}=1$$

$$\frac{480\cdot 144}{64}:360=\frac{480\cdot 144}{64\cdot 360}=\frac{2^5\cdot 3\cdot 5^1\cdot 2^4\cdot 3^2}{2^6\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 5^1}=\frac{2^9\cdot 3^3\cdot 5^1}{2^9\cdot 3^2\cdot 5^1}=3$$

$$\frac{2^9\cdot 3^8-6^8+2^8\cdot 3^7}{2^{10}+2^{11}}=\frac{2^9\cdot 3^8-2^8\cdot 3^8+2^8\cdot 3^7}{2^{10}+2^{11}}=\frac{2^8\cdot 3^7\cdot\left(2^1\cdot 3^1-3^1+1\right)}{2^8\cdot\left(2^2+2^3\right)}=\frac{3^7\cdot 4}{12}=3^6=729$$

12. Végezd el az alábbi műveleteket! (Az eredményeket pozitív kitevőkkel add meg!)

$$(x^2y^3z^{-4})^{-3} : (x^3yz^{-2})^3 \qquad \left(\frac{a^2bc^3}{x^{-2}y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^3b^{-2}c^{-2}}{x^2y^3}\right)^{-1} \qquad \left(\frac{2p^3q^2r^{-3}}{x^5y^{-1}}\right)^4 : \left(\frac{p^{-1}q^{-2}r^2}{4x^{-2}y^3}\right)^{-2}$$

Megoldás:
Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait.

$$(x^2y^3z^{-4})^{-3} : (x^3yz^{-2})^3 = \frac{x^{-6}y^{-9}z^{12}}{x^9y^3z^{-6}} = x^{-15}y^{-12}z^{18} = \frac{z^{18}}{x^{15}y^{12}}$$

$$\left(\frac{a^2bc^3}{x^{-2}y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^3b^{-2}c^{-2}}{x^2y^3}\right)^{-1} = \frac{a^6b^3c^9}{x^{-6}y^9} \cdot \frac{x^2y^3}{a^3b^{-2}c^{-2}} = \frac{a^6b^3c^9x^6}{y^9} \cdot \frac{x^2y^3b^2c^2}{a^3} = \frac{a^3b^5c^{11}x^8}{y^6}$$

$$\left(\frac{2p^3q^2r^{-3}}{x^5y^{-1}}\right)^4 : \left(\frac{p^{-1}q^{-2}r^2}{4x^{-2}y^3}\right)^{-2} = \frac{16p^{12}q^8r^{-12}}{x^{20}y^{-4}} : \left(\frac{4x^{-2}y^3}{p^{-1}q^{-2}r^2}\right)^2 = \frac{16p^{12}q^8r^{-12}}{x^{20}y^{-4}} \cdot \frac{p^{-2}q^{-4}r^4}{16x^{-4}y^6} =$$

$$= \frac{p^{10}q^4r^{-8}}{x^{16}y^2} = \frac{p^{10}q^4}{x^{16}y^2r^8}$$

13. Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\boldsymbol{3x^2y \cdot (2 + x - 4y^3 + xy)}$

b) $\boldsymbol{(d^3 - d^2 + d - 1) \cdot (d + 1)}$

c) $\boldsymbol{2a^2 - a \cdot (5b - 2a) + 4a \cdot \left(-3a + 2\frac{1}{2}b\right)}$

d) $\boldsymbol{(a - 3) \cdot (a + 4) - (a - 2) \cdot (a + 5)}$

e) $\boldsymbol{(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (3 - 4x)}$

Megoldás:
Szorozzunk meg minden tagot minden taggal, majd vonjuk össze az egynemű kifejezéseket.

a) $3x^2y \cdot (2 + x - 4y^3 + xy) = 6x^2y + 3x^3y - 12x^2y^4 + 3x^3y^2$

b) $(d^3 - d^2 + d - 1) \cdot (d + 1) = d^4 - d^3 + d^3 - d + d^3 - d^2 + d - 1 = d^4 - 1$

c) $2a^2 - a \cdot (5b - 2a) + 4a \cdot \left(-3a + 2\frac{1}{2}b\right) = 2a^2 - 5ab + 2a^2 - 12a^2 + 9ab =$

$= -8a^2 + 4ab$

d) $(a-3)\cdot(a+4)-(a-2)\cdot(a+5)=a^2+4a-3a-12-(a^2+5a-2a-10)=$

$$=a^2+4a-3a-12-a^2-5a+2a+10=-2a-2$$

e) $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(3-4x)=(x^2+2x-x-2)\cdot(3-4x)=$

$$=(x^2+x-2)\cdot(3-4x)=3x^2+3x$$

14. Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést, majd számold ki a helyettesítési értéket, ha $x=3$ és $y=-2$!

$$\boldsymbol{xy^2-\{-4x^3-[2x^2y+3\cdot(2x-y)\cdot(x^2+xy-y^3)-(3y^4-6xy^3)]+5x^2y\}}$$

Megoldás:
Először bontsuk fel a zárójeleket, majd vonjuk össze az egynemű kifejezéseket. Ezt követően a feladatban szereplő értékeket helyettesítsük be a változók helyére.

$$xy^2-\{-4x^3-[2x^2y+3\cdot(2x-y)\cdot(x^2+xy-y^3)-(3y^4-6xy^3)]+5x^2y\}=$$

$$=xy^2-[-4x^3-(2x^2y+6x^3+6x^2y-6xy^3-3x^2y-3xy^2+3y^4-3y^4+6xy^3)+5x^2y]=$$

$$=xy^2-[-4x^3-(5x^2y+6x^3-3xy^2)+5x^2y]=xy^2-(-4x^3-5x^2y-6x^3+3xy^2+5x^2y)$$

$$=xy^2-(-10x^3+3xy^2)=xy^2+10x^3-3xy^2=10x^3-2xy^2$$

Ezek alapján a megoldás: $10\cdot 3^3-2\cdot 3\cdot(-2)^2=246$.

15. Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}:\frac{21}{32}-\frac{5}{6}\cdot 5} \qquad \boldsymbol{\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right):\frac{35}{72}\right]^{-2}+\frac{63}{45}\cdot\frac{70}{42}-\left(1\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)^{-1}+2\cdot\frac{7}{10}}$$

Megoldás:
A műveleti sorrendnek megfelelően számítsuk ki a kifejezések értékét: törtet törttel úgy osztunk, hogy szorzunk az osztó reciprokával.

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}:\frac{21}{32}-\frac{5}{6}\cdot 5=\frac{9}{6}-\frac{2}{6}+\frac{3}{4}\cdot\frac{32}{21}-\frac{25}{6}=-\frac{18}{6}+\frac{8}{7}=-3+\frac{8}{7}=-\frac{13}{7}$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right):\frac{35}{72}\right]^{-2}+\frac{63}{45}\cdot\frac{70}{42}-\left(1\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)^{-1}+2\cdot\frac{7}{10}=\left[\left(\frac{9}{12}-\frac{2}{12}\right)\cdot\frac{72}{35}\right]^{-2}+\frac{7}{3}-\left(\frac{8}{6}-\frac{9}{6}\right)^{-1}+\frac{7}{5}=$$

$$=\left(\frac{7}{12}\cdot\frac{72}{35}\right)^{-2}+\frac{7}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}+\frac{7}{5}=\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}+\frac{7}{3}-(-6)+\frac{7}{5}=\frac{25}{36}+\frac{7}{3}+6+\frac{7}{5}=$$

$$=\frac{125}{180}+\frac{420}{180}+\frac{1080}{180}+\frac{252}{180}=\frac{1877}{180}$$

16. Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét!

$$\frac{\mathbf{10\,000\cdot 10\,004-10\,002\cdot 9998}}{\mathbf{10\,000\cdot 10\,001-10\,001\cdot 9999}}\qquad\frac{\mathbf{1234321234321\cdot 2468642468641-1234321234320}}{\mathbf{1234321234320\cdot 2468642468641+1234321234321}}$$

Megoldás:
Vezessük be az $x=10\,000$ és az $y=1234321234320$ jelöléseket.

$$\frac{10\,000\cdot 10\,004-10\,002\cdot 9998}{10\,000\cdot 10\,001-10\,001\cdot 9999}=\frac{x\cdot(x+4)-(x+2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)-(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x^2+4x-x^2+4}{x^2+x-x^2+1}=\frac{4x+4}{x+1}=\frac{4\cdot(x+1)}{x+1}=4$$

$$\frac{1234321234321\cdot 2468642468641-1234321234320}{1234321234320\cdot 2468642468641+1234321234321}=\frac{(y+1)\cdot(2y+1)-y}{y\cdot(2y+1)+y+1}=\frac{2y^2+y+2y+1-y}{2y^2+y+y+1}=$$

$$=\frac{2y^2+2y+1}{2y^2+2y+1}=1$$

17. Végezd el a következő műveleteket!

$(\mathbf{2}+\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}$ $\qquad(\mathbf{5}\boldsymbol{a}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}$ $\qquad(\boldsymbol{x}+\mathbf{4}\boldsymbol{y})^{\mathbf{2}}$ $\qquad(\mathbf{7}\boldsymbol{a}-\mathbf{10}\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}}$

$(\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\mathbf{3}\boldsymbol{y})$ $\qquad(\mathbf{2}\boldsymbol{a}-\mathbf{6}\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{6}\boldsymbol{b}+\mathbf{2}\boldsymbol{a})$ $\qquad\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{7}}+\boldsymbol{y}\right)\cdot\left(\boldsymbol{y}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{7}}\right)$

$(\mathbf{4}-\boldsymbol{a})^{\mathbf{3}}$ $\qquad(\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{5})^{\mathbf{3}}$ $\qquad(\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}}$ $\qquad(\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}\boldsymbol{y})^{\mathbf{3}}$

Megoldás:
Alkalmazzuk a nevezetes azonosságokat.

$(2+x)^2=2^2+2\cdot 2\cdot x+x^2=4+4x+x^2$

$(5a-3)^2=(5a)^2-2\cdot 5a\cdot 3+3^2=25a^2-30a+9$

$(x+4y)^2=x^2-2\cdot x\cdot 4y+(4y)^2=x^2-8xy+16y^2$

$(7a-10b)^2=(7a)^2-2\cdot 7a\cdot 10b+(10b)^2=49a^2-140ab+100b^2$

$(x+3y)\cdot(x-3y)=x^2-(3y)^2=x^2-9y^2$

$(2a-6b)\cdot(6b+2a)=(2a-6b)\cdot(2a+6b)=(2a)^2-(6b)^2=4a^2-36b^2$

$\left(\frac{2}{3}x^7+y\right)\cdot\left(y-\frac{2}{3}x^7\right)=\left(y+\frac{2}{3}x^7\right)\cdot\left(y-\frac{2}{3}x^7\right)=y^2-\left(\frac{2}{3}x^7\right)^2=y^2-\frac{4}{9}x^{14}$

$(4-a)^3=4^3-3\cdot 4^2\cdot a+3\cdot 4\cdot a^2-a^3=64-48a+12a^2-a^3$

$(6x+5)^3=(6x)^3+3\cdot(6x)^2\cdot 5+3\cdot 6x\cdot 5^2+5^3=216x^3+540x^2+450x+125$

$(2a+b)^3=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot b+3\cdot 2a\cdot b^2-b^3=8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$

$(4x-3y)^3=(4x)^3+3\cdot(4x)^2\cdot 3y+3\cdot 4x\cdot(3y)^2+(3y)^3=$

$=64x^3+144x^2y+108xy^2+27y^3$

18. Add meg a hiányzó tagokat úgy, hogy teljes négyzeteket kapjunk!

$\boldsymbol{a^2+\cdots+9b^2}$ $\boldsymbol{x^2-10xy+\cdots}$ $\boldsymbol{\ldots+28ab+49b^2}$

$\boldsymbol{\frac{1}{36}x^2-\cdots+\frac{4}{49}y^2}$ $\boldsymbol{a^6b^4-2a^3b^3+\cdots}$ $\boldsymbol{\frac{16}{25}x^8-\frac{24}{35}x^6+\cdots}$

<u>Megoldás:</u>
Pótoljuk ki a kifejezéseket úgy, hogy nevezetes azonosságokat kapjunk.

$a^2+\cdots+9b^2 \quad\rightarrow\quad a^2+6ab+9b^2=(a+3b)^2$

$x^2-10xy+\cdots \quad\rightarrow\quad x^2-10xy+25y^2=(x-5y)^2$

$\ldots+28ab+49b^2 \quad\rightarrow\quad 4a^2+28ab+49b^2=(2a+7b)^2$

$\frac{1}{36}x^2-\cdots+\frac{4}{49}y^2 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{36}x^2-\frac{2}{21}xy+\frac{4}{49}y^2=\left(\frac{1}{6}x-\frac{2}{7}y\right)^2$

$a^6b^4 - 2a^3b^3 + \cdots \quad \rightarrow \quad a^6b^4 - 2a^3b^3 + b^2 = (a^3b^2 - b)^2$

$\frac{16}{25}x^8 - \frac{24}{35}x^6 + \cdots \quad \rightarrow \quad \frac{16}{25}x^8 - \frac{24}{35}x^6 + \frac{9}{49}x^4 = \left(\frac{4}{5}x^4 - \frac{3}{7}x^2\right)^2$

19. Végezd el a következő műveleteket!

$\boldsymbol{(a-b)^4}$ $\quad$ $\boldsymbol{(x+y)^5}$ $\quad$ $\boldsymbol{(3a+b+5c)^2}$ $\quad$ $\boldsymbol{(x-2y-z)^2}$

$\boldsymbol{8a^3-b^3}$ $\quad$ $\boldsymbol{x^3+125y^3}$ $\quad$ $\boldsymbol{a^6-b^6}$ $\quad$ $\boldsymbol{x^5+32y^5}$

$\boldsymbol{\left(a^{2n+1}-b^{5n-3}\right)\cdot\left(a^{2n+1}+b^{5n-3}\right)}$ $\quad$ $\boldsymbol{\left(2^n-n^k\right)^2}$ $\quad$ $\boldsymbol{(3+x+y)\cdot(3-x-y)}$

<u>Megoldás:</u>
Alkalmazzuk a nevezetes azonosságokat.

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

$(3a+b+5c)^2 = 9a^2 + b^2 + 25c^2 + 6ab + 30ac + 10bc$

$(x-2y-z)^2 = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$

$8a^3 - b^3 = (2a-b) \cdot (4a^2 + 2ab + b^2)$

$x^3 + 125y^3 = (x+5y) \cdot (x^2 - 5xy + 25y^2)$

$a^6 - b^6 = (a-b) \cdot (a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

$x^5 + 32y^5 = (x+2y) \cdot (x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4)$

$(a^{2n+1} - b^{5n-3}) \cdot (a^{2n+1} + b^{5n-3}) = (a^{2n+1})^2 - (b^{5n-3})^2 = a^{4n+2} - b^{10n-6}$

$(2^n - n^k)^2 = (2^n)^2 - 2 \cdot 2^n \cdot n^k + (n^k)^2 = 2^{2n} - 2^{n+1} \cdot n^k + n^{2k}$

$$(3+x+y)\cdot(3-x-y)=(3+x+y)\cdot[3-(x+y)]=$$

$$=3^2-(x+y)^2=9-x^2-2xy-y^2$$

20. Alakítsd teljes négyzetté a következő kifejezéseket!

$\boldsymbol{x^2+4x-11}$ $\boldsymbol{x^2-12x+43}$ $\boldsymbol{4x^2-12x+13}$

$\boldsymbol{2x^2+16x-8}$ $\boldsymbol{5x^2-20x-3}$ $\boldsymbol{3x^2-30x+79}$

Megoldás:
A teljes négyzetté alakításhoz az első két tagot kell átalakítanunk nevezetes azonossággá, de mivel az azonosság alapján adódna egy harmadik tag is, ezért azt utólag le kell vonnunk ahhoz, hogy a kifejezés értéke ne változzon.

Egy másik megoldás lehet a TEVE (teszek – veszek) - szabály alkalmazása: az első két tagot kiegészítjük egy harmadikkal úgy, hogy a három tag egy nevezetes azonosságot alkosson, majd a beillesztett tagot le is vonjuk, hogy a kifejezés értéke ne változzon.

Abban az esetben, ha az x^2 együtthatója nem négyzetszám, akkor először azt célszerű kiemelni az első két tagból, majd a megmaradó két tagot kell átalakítanunk az előzőkhöz hasonlóan.

Ezek alapján a megoldások:

$$x^2+4x-11=(x+2)^2-4-11=(x+2)^2-15$$

$$x^2-12x+43=(x-6)^2-36+43=(x-6)^2+7$$

$$4x^2-12x+13=4x^2-12x+9-9+13=(2x-3)^2+4$$ → TEVE - szabály

$$2x^2+16x-8=2\cdot(x^2+8x)-8=2\cdot[(x+4)^2-16]-8=2\cdot(x+4)^2-32-8=$$

$$=2\cdot(x+4)^2-40$$

$$5x^2-20x-3=5\cdot(x^2-4x)-3=5\cdot[(x-2)^2-4]-3=5\cdot(x-2)^2-20-3=$$

$$=5\cdot(x-2)^2-23$$

$$3x^2-30x+79=3\cdot(x^2-10x)+79=3\cdot(x^2-10x+25-25)+79=$$

$$=3\cdot[(x-5)^2-25]+79=3\cdot(x-5)^2-75+79=$$

$$=3\cdot(x-5)^2+4$$ → TEVE - szabály

21. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

$\boldsymbol{x^2 - 10x + 25}$	$\boldsymbol{49 - 28a + 4a^2}$
$\boldsymbol{121x^2 - 169y^2}$	$\boldsymbol{\frac{1}{16}a^2 - \frac{9}{64}b^{10}}$
$\boldsymbol{a^3 + 6a^2 + 12a + 8}$	$\boldsymbol{125x^3 - 75x^2y + 15xy^2 - y^3}$
$\boldsymbol{12a + 10ab - 4a^2 + 2a^5}$	$\boldsymbol{18a^5b - 6a^3b^2 + 12a^4b^3}$
$\boldsymbol{8x^2 + 24x + 18}$	$\boldsymbol{8a^2b^3 - 12a^4b^2 + 18a^6b}$
$\boldsymbol{600x^3 - 54xy^4}$	$\boldsymbol{1 - x^8}$
$\boldsymbol{12xy - 24ay + 72ab - 36bx}$	$\boldsymbol{4ax + 7b - 28a - bx}$

Megoldás:
A kifejezések szorzattá alakításához alkalmazzuk a következőket: nevezetes azonosság, kiemelés, teljes négyzetté alakítás.

$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = (x - 5) \cdot (x - 5)$

$49 - 28a + 4a^2 = (7 - 2a)^2 = (7 - 2a) \cdot (7 - 2a)$

$121x^2 - 169y^2 = (11x - 13y) \cdot (11x + 13y)$

$\frac{1}{16}a^2 - \frac{9}{64}b^{10} = \left(\frac{1}{4}a - \frac{3}{8}b^5\right) \cdot \left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{8}b^5\right)$

$a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = (a + 2)^3 = (a + 2) \cdot (a + 2) \cdot (a + 2)$

$125x^3 - 75x^2y + 15xy^2 - y^3 = (5x - y)^3 = (5x - y) \cdot (5x - y) \cdot (5x - y)$

$12a + 10ab - 4a^2 + 2a^5 = 2a \cdot (6 + 5b - 2a + a^4)$

$18a^5b - 6a^3b^2 + 12a^4b^3 = 6a^3b \cdot (3a^2 - b + 2ab^2)$

$8x^2 + 24x + 18 = 2 \cdot (4x^2 + 12x + 9) = 2 \cdot (2x + 3)^2 = 2 \cdot (2x + 3) \cdot (2x + 3)$

$8a^2b^3 - 24a^4b^2 + 18a^6b = 2a^2b \cdot (4b^2 - 12a^2b + 9a^4) = 2a^2b \cdot (2b - 3a^2)^2$

$600x^3 - 54xy^4 = 6x \cdot (100x^2 - 9y^4) = 6x \cdot (10x - 3y^2) \cdot (10x + 3y^2)$

$1 - x^8 = (1 - x^4) \cdot (1 + x^4) = (1 - x^2) \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + x^4) =$

$= (1 - x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + x^4)$

$12xy - 24ay + 72ab - 36bx = 12y \cdot (x - 2a) - 36b \cdot (x - 2a) =$

$= (x - 2a) \cdot (12y - 36b) = 12 \cdot (x - 2a) \cdot (y - 3b)$

$4ax + 7b - 28a - bx = 4ax - 28a + 7b - bx = 4a \cdot (x - 7) - b \cdot (x - 7) =$

$= (x - 7) \cdot (4a - b)$

22. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

$\boldsymbol{x^3 - 8}$

$\boldsymbol{1000a^3 + b^3}$

$\boldsymbol{x^2 + 12x + 11}$

$\boldsymbol{a^2 - 16a + 15}$

$\boldsymbol{6x^2 + 13x + 7}$

$\boldsymbol{x^4 + 4}$

$\boldsymbol{a^3 + 6a^2 + 11a + 6}$

$\boldsymbol{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$

Megoldás:
A kifejezések szorzattá alakításához alkalmazzuk a következőket: nevezetes azonosság, kiemelés, teljes négyzetté alakítás.

$x^3 - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$

$1000a^3 + b^3 = (10a + b) \cdot (100a^2 - 10ab + b^2)$

$x^2 + 12x + 11 = (x + 6)^2 - 36 + 11 = (x + 6)^2 - 25 =$

$= (x + 6 - 5) \cdot (x + 6 + 5) = (x + 1) \cdot (x + 11)$

$a^2 - 16a + 15 = (a - 8)^2 - 64 + 15 = (a - 8)^2 - 49 =$

$= (a - 8 - 7) \cdot (a - 8 + 7) = (a - 15) \cdot (a - 1)$

$6x^2 + 13x + 7 = 6x^2 + 6x + 7x + 7 = 6x \cdot (x + 1) + 7 \cdot (x + 1) = (x + 1) \cdot (6x + 7)$

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x) \cdot (x^2 + 2 + 2x)$$

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 6a^2 + 9a + 2a + 6 = a \cdot (a^2 + 6a + 9) + 2 \cdot (a + 3) =$$

$$= a \cdot (a + 3)^2 + 2 \cdot (a + 3) = (a + 3) \cdot [a \cdot (a + 3) + 2] =$$

$$= (a + 3) \cdot (a^2 + 3a + 2) = (a + 3) \cdot (a^2 + 2a + 1 + a + 1) =$$

$$= (a + 3) \cdot [(a + 1)^2 + a + 1] = (a + 3) \cdot [(a + 1) \cdot (a + 1 + 1)] =$$

$$= (a + 3) \cdot (a + 2) \cdot (a + 1)$$

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x^2 - 2x - 3 =$$

$$= x^2 \cdot (x^2 - 2x - 3) + x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 + 1) =$$

$$= (x^2 - 2x + 1 - 4) \cdot (x^2 + 1) = [(x - 1)^2 - 4] \cdot (x^2 + 1) =$$

$$= [(x - 1 - 2)(x - 1 + 2)] \cdot (x^2 + 1) = (x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

23. Határozd meg a következő törtek értelmezési tartományát!

$$\frac{x}{a-5} \qquad \frac{2}{x-3y} \qquad \frac{7a+11}{5} \qquad \frac{2x}{ab-5a+2b-10} \qquad \frac{y-x}{9x^2-30xy+25y^2} \qquad \frac{7}{4a^2-81}$$

Megoldás:
A törtek nevezőjében szereplő kifejezések értéke nem lehet 0, mert a 0 – val való osztást nem értelmezzük. Amennyiben a nevezőben bonyolultabb kifejezés szerepel, akkor célszerű (ha lehet) azt szorzattá alakítani. Mivel egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért ezt követően a szorzat tényezői nem lehetnek egyenlők 0 - val.

$a - 5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \neq 5$

$x - 3y \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 3y$

$5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \in \mathbb{R}$

$$ab - 5a + 2b - 10 = a \cdot (b - 5) + 2 \cdot (b - 5) = (b - 5) \cdot (a + 2) \neq 0$$

$\rightarrow \quad b - 5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad b \neq 5$

$a + 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \neq -2$

$9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x-5)^2 = (3x-5) \cdot (3x-5) \neq 0$

$\rightarrow \quad 3x - 5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq \frac{5}{3}$

$4a^2 - 81 = (2a-9) \cdot (2a+9) \neq 0$

$\rightarrow \quad 2a - 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \neq \frac{9}{2}$

$2a + 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \neq -\frac{9}{2}$

24. Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{143r^4s^8t^5}{66r^5s^2t^3} \qquad \frac{5a}{5a+15b} \qquad \frac{ik^3}{i^2k - ik^2}$$

$$\frac{5y+15}{6y+18} \qquad \frac{b-a}{a-b} \qquad \frac{5in-5jn}{15jm-15im}$$

$$\frac{2x+4}{x^2-4} \qquad \frac{3a^2-3}{7a+7} \qquad \frac{c^2-6c+9}{9-3c}$$

$$\frac{9x^2+18xy+9y^2}{12x^2-12y^2} \qquad \frac{4x^3y+4xy^3}{x^4-y^4} \qquad \frac{ax+bx-ay-by}{7x-7y}$$

Megoldás:
Először (ha lehet) alakítsuk szorzattá a számlálóban és nevezőben levő kifejezést is. Ezt követően a számlálóban és nevezőben megjelenő közös tényezőkkel egyszerűsíthetjük a törtet.

Ezek alapján a megoldások:

$$\frac{143r^4s^8t^5}{66r^5s^2t^3} = \frac{13s^6t^2}{6r} = \frac{13r^{-1}s^6t^2}{6}$$

$$\frac{5a}{5a+15b} = \frac{5a}{5 \cdot (a+3b)} = \frac{a}{a+3b}$$

$$\frac{ik^3}{i^2k - ik^2} = \frac{ik^3}{ik \cdot (i-k)} = \frac{k^2}{i-k}$$

$$\frac{5y+15}{6y+18}=\frac{5\cdot(y+3)}{6\cdot(y+3)}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{b-a}{a-b}=\frac{-(a-b)}{a-b}=-1$$

$$\frac{5in-5jn}{15jm-15im}=\frac{5n\cdot(i-j)}{15m\cdot(j-i)}=\frac{-5n\cdot(j-i)}{15m\cdot(j-i)}=\frac{-n}{3m}$$

$$\frac{2x+4}{x^2-4}=\frac{2\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{2}{x-2}$$

$$\frac{3a^2-3}{7a+7}=\frac{3\cdot\left(a^2-1\right)}{7\cdot(a+1)}=\frac{3\cdot(a-1)\cdot(a+1)}{7\cdot(a+1)}=\frac{3\cdot(a-1)}{7}$$

$$\frac{c^2-6c+9}{9-3c}=\frac{(c-3)^2}{3\cdot(3-c)}=\frac{(c-3)\cdot(c-3)}{-3\cdot(c-3)}=\frac{c-3}{-3}=-\frac{c-3}{3}=\frac{3-c}{3}$$

$$\frac{9x^2+18xy+9y^2}{12x^2-12y^2}=\frac{9\cdot\left(x^2+2xy+y^2\right)}{12\cdot\left(x^2-y^2\right)}=\frac{9\cdot(x+y)^2}{12\cdot(x-y)\cdot(x+y)}=\frac{3\cdot(x+y)}{4\cdot(x-y)}$$

$$\frac{4x^3y+4xy^3}{x^4-y^4}=\frac{4xy\cdot\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)}=\frac{4xy}{x^2-y^2}$$

$$\frac{ax+bx-ay-by}{7x-7y}=\frac{x\cdot(a+b)-y\cdot(a+b)}{7\cdot(x-y)}=\frac{(a+b)\cdot(x-y)}{7\cdot(x-y)}=\frac{a+b}{7}$$

Az értelmezési tartomány vizsgálatát mindig az egyszerűsítés előtt kell végrehajtanunk, mert az egyszerűsítés után bővülhet az alaphalmaz.

$\frac{2x+4}{x^2-4}$ → Egyszerűsítés előtt: $x^2-4\neq 0$ → $x\neq 2$ és $x\neq -2$

→ Egyszerűsítés után: $x\neq 2$

25. Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1} \qquad \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} \qquad \frac{3a+6}{a^3+8}$$

$$\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}} \qquad \frac{(x^2-y^2-z^2-2yz)\cdot(x+y-z)}{(x+y+z)\cdot(x^2+z^2-2xz-y^2)} \qquad \frac{(a+1)\cdot(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)\cdot(a^2+a+1)}$$

Megoldás:

Először (ha lehet) alakítsuk szorzattá a számlálóban és nevezőben levő kifejezést is. Ezt követően a számlálóban és nevezőben megjelenő közös tényezőkkel egyszerűsíthetjük a törtet.

$$\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}=\frac{a^2\cdot(a-1)-(a-1)}{(a^2-1)^2}=\frac{(a-1)\cdot(a^2-1)}{(a^2-1)\cdot(a^2-1)}=\frac{(a-1)\cdot(a^2-1)}{(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a^2-1)}=\frac{1}{a+1}$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=\frac{x^2+2x+x+2}{(x+2)^2-4+3}=\frac{x\cdot(x+2)+(x+2)}{(x+2)^2-1}=\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{(x+2-1)\cdot(x+2+1)}=\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}$$

$$\frac{3a+6}{a^3+8}=\frac{3\cdot(a+2)}{(a+2)\cdot(a^2-2a+4)}=\frac{3}{a^2-2a+4}$$

$$\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}}=\frac{\frac{x^2-1-x^2}{x^2-1}}{\frac{2-2x+3x-1}{1-x}}=\frac{\frac{-1}{x^2-1}}{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{-1}{(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{-1}{(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{-(x-1)}{x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{(x^2-y^2-z^2-2yz)\cdot(x+y-z)}{(x+y+z)\cdot(x^2+z^2-2xz-y^2)}=\frac{[x^2-(y^2+2yz+z^2)]\cdot(x+y-z)}{(x+y+z)\cdot[x^2-2xz+z^2-y^2]}=\frac{[x^2-(y+z)^2]\cdot(x+y-z)}{(x+y+z)\cdot[(x-z)^2-y^2]}=$$

$$=\frac{[x-(y+z)]\cdot[x+(y+z)]\cdot(x+y-z)}{(x+y+z)\cdot(x-z-y)\cdot(x-z+y)}=\frac{(x-y-z)\cdot(x+y+z)\cdot(x+y-z)}{(x+y+z)\cdot(x-z-y)\cdot(x-z+y)}=1$$

$$\frac{(a+1)\cdot(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)\cdot(a^2+a+1)}=\frac{(a+1)\cdot(a^8+2a^4+1-a^4)}{(a^4-a^2+1)\cdot(a^2+a+1)}=\frac{(a+1)\cdot\left[(a^4+1)^2-a^4\right]}{(a^4-a^2+1)\cdot(a^2+a+1)}=$$

$$=\frac{(a+1)\cdot(a^4+1-a^2)\cdot(a^4+1+a^2)}{(a^4-a^2+1)\cdot(a^2+a+1)}=\frac{(a+1)\cdot(a^4+2a^2+1-a^2)}{a^2+a+1}=$$

$$=\frac{(a+1)\cdot\left[(a^2+1)^2-a^2\right]}{a^2+a+1}=\frac{(a+1)\cdot(a^2+1-a)\cdot(a^2+1+a)}{a^2+a+1}=$$

$$=(a+1)\cdot(a^2-a+1)=a^3+1$$

26. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(4a+b)\cdot(4a-b)-(3a+2b)^2+5b^2}{7a-12b} \qquad \frac{(3a-1)\cdot(2a+1)^2-3a\cdot(2a+3)^2+1}{-28a} \qquad \frac{(2x+1)^2-(3x-1)\cdot(3x+1)+5x^2}{2x+1}$$

Megoldás:
A zárójelek felbontása és a lehetséges összevonások után végezzük el az egyszerűsítéseket.

$$\frac{(4a+b)\cdot(4a-b)-(3a+2b)^2+5b^2}{7a-12b}=\frac{16a^2-b^2-\left(9a^2+12ab+4b^2\right)+5b^2}{7a-12b}=\frac{16a^2-b^2-9a^2-12ab-4b^2+5b^2}{7a-12b}=$$

$$=\frac{7a^2-12ab}{7a-12b}=\frac{a\cdot(7a-12b)}{7a-12b}=a$$

$$\frac{(3a-1)\cdot(2a+1)^2-3a\cdot(2a+3)^2+1}{-28a}=\frac{(3a-1)\cdot\left(4a^2+4a+1\right)-3a\cdot\left(4a^2+12a+9\right)+1}{-28a}=$$

$$=\frac{12a^3+12a^2+3a-4a^2-4a-1-12a^3-36a^2-27a+1}{-28a}=\frac{-28a^2-28a}{-28a}=\frac{-28a\cdot(a+1)}{-28a}=a+1$$

$$\frac{(2x+1)^2-(3x-1)\cdot(3x+1)+5x^2}{2x+1}=\frac{4x^2+4x+1-\left(9x^2-1\right)+5x^2}{2x+1}=\frac{4x^2+4x+1-9x^2+1+5x^2}{2x+1}=\frac{4x+2}{2x+1}=\frac{2\cdot(2x+1)}{2x+1}=2$$

27. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(a-b)^3-3ab\cdot(a+b)+b^3}{a-6b} \qquad \frac{(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)+b^3-a^2}{a-1}$$

Megoldás:
A zárójelek felbontása és a lehetséges összevonások után végezzük el az egyszerűsítéseket.

$$\frac{(a-b)^3-3ab\cdot(a+b)+b^3}{a-6b}=\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-3a^2b-3ab^2+b^3}{a-6b}=\frac{a^3-6a^2b}{a-6b}=\frac{a^2\cdot(a-6b)}{a-6b}=a^2$$

$$\frac{(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)+b^3-a^2}{a-1}=\frac{a^3-b^3+b^3-a^2}{a-1}=\frac{a^3-a^2}{a-1}=\frac{a\cdot(a-1)}{a-1}=a$$

28. Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(2x)^2\cdot y}{6\cdot x^5\cdot x^7}\cdot\frac{\left(x^{-4}\right)^3}{\left(x^2\cdot y^6\right)^{-9}} \qquad \frac{6a^3}{5b^{-2}}\cdot\frac{10ab^8}{3a^5}:\frac{4b^{11}}{a^6} \qquad \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$$

$$\frac{x^2-25}{x^2-2x}:\frac{x^2+5x}{x^4-4x^2} \qquad \frac{5x^2-20y^2}{3x+6y}:\frac{5x-10y}{9x} \qquad \frac{2ab-a^2}{4b^2-a^2}\cdot\frac{6b+3a}{a}$$

Megoldás:
A műveletek elvégzéséhez először az osztást át kell írnunk szorzássá. Ezt követően a nevezőben és a számlálóban levő kifejezést is (ha lehet) alakítsuk szorzattá. Végül a szorzások elvégzése előtt, egyszerűsítsünk a megfelelő tényezőkkel.

Ezek alapján a megoldások:

$$\frac{(2x)^2\cdot y}{6\cdot x^5\cdot x^7}\cdot\frac{\left(x^{-4}\right)^3}{\left(x^2\cdot y^6\right)^{-9}}=\frac{4x^2y}{6x^{12}}\cdot\frac{x^{-12}}{x^{-18}y^{-54}}=\frac{4x^{-10}y}{6x^{-6}y^{-54}}=\frac{2x^{-4}y^{55}}{3}=\frac{2y^{55}}{3x^4}$$

$$\frac{6a^3}{5b^{-2}}\cdot\frac{10ab^8}{3a^5}:\frac{4b^{11}}{a^6}=\frac{6a^3}{5b^{-2}}\cdot\frac{10ab^8}{3a^5}\cdot\frac{a^6}{4b^{11}}=\frac{60a^{10}b^8}{60a^5b^9}=\frac{a^5}{b}$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)\cdot(x+3)}\cdot\frac{(x+3)^2}{x\cdot(x+3)}=\frac{x-3}{x}$$

$$\frac{x^2-25}{x^2-2x}:\frac{x^2+5x}{x^4-4x^2}=\frac{x^2-25}{x^2-2x}\cdot\frac{x^4-4x^2}{x^2+5x}=\frac{(x-5)\cdot(x+5)}{x\cdot(x-2)}\cdot\frac{x^2\cdot\left(x^2-4\right)}{x\cdot(x+5)}=\frac{(x-5)\cdot(x+5)}{x\cdot(x-2)}\cdot\frac{x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{x\cdot(x+5)}=$$

$$=\frac{(x-5)\cdot(x+2)}{1}=x^2-3x-10$$

$$\frac{5x^2-20y^2}{3x+6y}:\frac{5x-10y}{9x}=\frac{5\cdot\left(x^2-4y^2\right)}{3x+6y}\cdot\frac{9x}{5x-10y}=\frac{5\cdot(x-2y)\cdot(x+2y)}{3\cdot(x+2y)}\cdot\frac{9x}{5\cdot(x-2y)}=3x$$

$$\frac{2ab-a^2}{4b^2-a^2}\cdot\frac{6b+3a}{a}=\frac{a\cdot(2b-a)}{(2b-a)\cdot(2b+a)}\cdot\frac{3\cdot(2b+a)}{a}=3$$

29. Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{3a^2-6ab}{a^2+4b^2}\cdot\frac{a^4-16b^4}{15\cdot(a-2b)^2} \qquad \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}\cdot\frac{2x+2}{x-2} \qquad \frac{a^2-10a+25}{a^2-3a-10}:\frac{a-5}{4a+8}$$

$$\frac{x^3+27}{8x+6}\cdot\frac{12x+9}{x^2+6x+9} \qquad \frac{3a^3+18a^2+27a}{5a+15}:\frac{a^3-9a}{10a-30} \qquad \frac{a^2-5a+6}{a^2+7a+12}\cdot\frac{a^2+3a}{a^2-4a-4}$$

Megoldás:
A műveletek elvégzéséhez először az osztást át kell írnunk szorzássá. Ezt követően a nevezőben és a számlálóban levő kifejezést is (ha lehet) alakítsuk szorzattá. Végül a szorzások elvégzése előtt, egyszerűsítsünk a megfelelő tényezőkkel.

Ezek alapján a megoldások:

$$\frac{3a^2-6ab}{a^2+4b^2}\cdot\frac{a^4-16b^4}{15\cdot(a-2b)^2}=\frac{3a\cdot(a-2b)}{a^2+4b^2}\cdot\frac{(a^2-4b^2)\cdot(a^2+4b^2)}{15\cdot(a-2b)^2}=$$

$$=\frac{3a\cdot(a-2b)}{a^2+4b^2}\cdot\frac{(a-2b)\cdot(a+2b)\cdot(a^2+4b^2)}{15\cdot(a-2b)^2}=\frac{a\cdot(a+2b)}{5}=\frac{a^2+2ab}{5}$$

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}\cdot\frac{2x+2}{x-2}=\frac{x^2-1-x-1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2\cdot(x+1)}{x-2}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)-(x+1)}{(x+1)^2}\cdot\frac{2\cdot(x+1)}{x-2}=\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x+1)^2}\cdot\frac{2\cdot(x+1)}{x-2}=2$$

$$\frac{a^2-10a+25}{a^2-3a-10}:\frac{a-5}{4a+8}=\frac{(a-5)^2}{a^2-4-3a-6}\cdot\frac{4\cdot(a+2)}{a-5}=\frac{(a-5)^2}{(a-2)\cdot(a+2)-3\cdot(a+2)}\cdot\frac{4\cdot(a+2)}{a-5}=\frac{(a-5)^2}{(a+2)\cdot(a-5)}\cdot\frac{4\cdot(a+2)}{a-5}=4$$

$$\frac{x^3+27}{8x+6}\cdot\frac{12x+9}{x^2+6x+9}=\frac{(x+3)\cdot(x^2-3x+9)}{2\cdot(4x+3)}\cdot\frac{3\cdot(4x+3)}{(x+3)^2}=\frac{3\cdot(x^2-3x+9)}{2\cdot(x+3)}=\frac{3x^2-9x+27}{2x+6}$$

$$\frac{3a^3+18a^2+27a}{5a+15}:\frac{a^3-9a}{10a-30}=\frac{3a\cdot(a^2+6a+9)}{5\cdot(a+3)}\cdot\frac{10\cdot(a-3)}{a\cdot(a-3)\cdot(a+3)}=\frac{3a\cdot(a+3)^2}{5\cdot(a+3)}\cdot\frac{10\cdot(a-3)}{a\cdot(a-3)\cdot(a+3)}=6$$

$$\frac{a^2-5a+6}{a^2+7a+12}\cdot\frac{a^2+3a}{a^2-4a-4}=\frac{a^2-2a-3a+6}{a^2+3a+4a+12}\cdot\frac{a\cdot(a+3)}{(a-2)^2}=\frac{a\cdot(a-2)-3\cdot(a-2)}{a\cdot(a+3)+4\cdot(a+3)}\cdot\frac{a\cdot(a+3)}{(a-2)^2}=$$

$$=\frac{(a-3)\cdot(a-2)}{(a+4)\cdot(a+3)}\cdot\frac{a\cdot(a+3)}{(a-2)^2}=\frac{a\cdot(a-3)}{(a+4)\cdot(a-2)}=\frac{a^2-3a}{a^2-2a-8}$$

30. Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$\frac{2a+5}{4}-\frac{2a-3}{5}$ $\qquad$ $2a-\frac{a-b}{5}$ $\qquad$ $\frac{2a-3b}{a^2b}-\frac{4a-5b}{ab^2}$

$\frac{5a}{6b^2c}+\frac{11c}{18a^2b}-\frac{7b}{12ac^2}$ $\qquad$ $\frac{a+3}{a-1}+\frac{5-a}{a}$ $\qquad$ $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a+2b}{b-a}$

Megoldás:

A műveletek elvégzéséhez először közös nevezőre kell hoznunk a törteket, amihez a nevezők legkisebb közös többszörösét célszerű választanunk. A közös nevező meghatározásához célszerű (ha lehet) szorzattá alakítanunk a nevezőket. A közös nevező megállapítása után a törteket bővítsük úgy, hogy a nevezőjük a közös nevező legyen: amennyivel szorozzuk a nevezőt, annyival szorozzuk a számlálót is. Végül vonjuk össze a törteket, s a kapott törtet hozzuk a legegyszerűbb alakra.

Összevonáskor figyelni kell arra, hogy a törtvonás zárójelet helyettesít, vagyis ha valamelyik tört előtt negatív jel szerepel, akkor a számlálóban levő kifejezést zárójelbe kell tennünk.

Abban az esetben, ha két tag különbségére lenne szükségünk a közös nevezőhöz, de a két tört nevezőjében fordított sorrendben állnak a tagok, akkor ki kell emelnünk az egyik nevezőből (-1) – et. Ezt követően, ha a (-1) – szeres szorzót el szeretnénk hagyni a nevezőből, akkor a tört előjelét kell megváltoztatnunk.

Ezek alapkán a megoldások:

$$\frac{2a+5}{4}-\frac{2a-3}{5}=\frac{5\cdot(2a+5)}{20}-\frac{4\cdot(2a-3)}{20}=\frac{10a+25-(8a-12)}{20}=\frac{10a+25-8a+12}{20}=\frac{2a+37}{20}$$

$$2a-\frac{a-b}{5}=\frac{10a}{5}-\frac{a-b}{5}=\frac{10a-(a-b)}{5}=\frac{10a-a+b}{5}=\frac{9a+b}{5}$$

$$\frac{2a-3b}{a^2b}-\frac{4a-5b}{ab^2}=\frac{b\cdot(2a-3b)}{a^2b^2}-\frac{a\cdot(4a-5b)}{a^2b^2}=\frac{2ab-3b^2-4a^2+5ab}{a^2b^2}=\frac{-4a^2-3b^2+7ab}{a^2b^2}$$

$$\frac{5a}{6b^2c}+\frac{11c}{18a^2b}-\frac{7b}{12ac^2}=\frac{30a^3c}{36a^2b^2c^2}+\frac{22bc^3}{36a^2b^2c^2}-\frac{21ab^3}{36a^2b^2c^2}=\frac{30a^3c+22bc^3-21ab^3}{36a^2b^2c^2}$$

$$\frac{a+3}{a-1}+\frac{5-a}{a}=\frac{a\cdot(a+3)}{a\cdot(a-1)}+\frac{(5-a)\cdot(a-1)}{a\cdot(a-1)}=\frac{a^2+3a+5a-a^2-5+a}{a\cdot(a-1)}=\frac{9a-5}{a\cdot(a-1)}$$

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a+2b}{b-a}=\frac{a+b}{a-b}-\frac{a+2b}{-(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}+\frac{a+2b}{a-b}=\frac{a+b+a+2b}{a-b}=\frac{2a+3b}{a-b}$$

31. Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x+2}{2x^2-2} \qquad 4+\frac{6}{x-1}+\frac{2+2x}{1-x^2} \qquad \frac{2a+1}{a+1}+\frac{a-2}{a-1}-\frac{3a^2-1}{a^2-1}$$

$$\frac{3x+1}{x}+\frac{2x-3}{x+1}-\frac{5x-2}{x-1} \qquad \frac{1}{p-3}-\frac{3}{2p+6}-\frac{p}{2p^2-12p+18} \qquad \frac{4x-3}{3-2x}-\frac{4+5x}{3+2x}-\frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$$

$$\frac{x+3}{1+x}+\frac{2x-1}{1-x}-\frac{x-3}{x^2-1} \qquad \frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a} \qquad \frac{7}{8a^2-18b^2}+\frac{1}{2a^2+3ab}-\frac{1}{4ab-6b^2}$$

<u>Megoldás:</u>
A közös nevező meghatározásához célszerű (ha lehet) szorzattá alakítanunk a nevezőket.

$$\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x+2}{2x^2-2}=\frac{x+1}{x\cdot(x-1)}-\frac{x+2}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot(x+1)}{2x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{x\cdot(x+2)}{2x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(x^2+2x+1\right)-\left(x^2+2x\right)}{2x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{2x^2+4x+2-x^2-2x}{2x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2+2x+2}{2x\cdot(x^2-1)}$$

$$4+\frac{6}{x-1}+\frac{2+2x}{1-x^2}=4+\frac{6}{-(1-x)}+\frac{2+2x}{(1-x)\cdot(1+x)}=\frac{4\cdot(1-x)\cdot(1+x)}{(1-x)\cdot(1+x)}-\frac{6\cdot(1+x)}{(1-x)\cdot(1+x)}+\frac{2+2x}{(1-x)\cdot(1+x)}=$$

$$=\frac{4-4x^2-(6+6x)+2+2x}{(1-x)\cdot(1+x)}=\frac{-4x^2-4x}{(1-x)\cdot(1+x)}=\frac{-4x\cdot(x+1)}{(1-x)\cdot(1+x)}=\frac{-4x}{1-x}=\frac{-4x}{-(x-1)}=\frac{4x}{x-1}$$

$$\frac{2a+1}{a+1}+\frac{a-2}{a-1}-\frac{3a^2-1}{a^2-1}=\frac{(2a+1)\cdot(a-1)}{(a+1)\cdot(a-1)}+\frac{(a-2)\cdot(a+1)}{(a-1)\cdot(a+1)}-\frac{3a^2-1}{(a-1)\cdot(a+1)}=$$

$$=\frac{2a^2-2a+a-1+a^2+a-2a-2-(3a^2-1)}{(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{-2a-2}{(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{(-2)\cdot(a+1)}{(a-1)\cdot(a+1)}=$$

$$=\frac{-2}{a-1}=\frac{-2}{-(1-a)}=\frac{2}{1-a}$$

$$\frac{3x+1}{x}+\frac{2x-3}{x+1}-\frac{5x-2}{x-1}=\frac{(3x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}+\frac{(2x-3)\cdot(x-1)\cdot x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{(5x-2)\cdot(x+1)\cdot x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{3x^3-3x+x^2-1+2x^3-2x^2-3x^2+3x-(5x^3+5x^2-2x^2-2x)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{-7x^2+2x-1}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$$

$$\frac{1}{p-3}-\frac{3}{2p+6}-\frac{p}{2p^2-12p+18}=\frac{1}{p-3}-\frac{3}{2\cdot(p+3)}-\frac{p}{2\cdot(p-3)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot(p+3)\cdot(p-3)}{2\cdot(p+3)\cdot(p-3)^2}-\frac{3\cdot(p-3)^2}{2\cdot(p+3)\cdot(p-3)^2}-\frac{p\cdot(p+3)}{2\cdot(p+3)\cdot(p-3)^2}=$$

$$=\frac{2p^2-18-\left(3p^2-18p+27\right)-\left(p^2+3p\right)}{2\cdot(p+3)\cdot(p-3)^2}=\frac{-2p^2+15p-45}{2\cdot(p+3)\cdot(p-3)^2}$$

$$\frac{4x-3}{3-2x}-\frac{4+5x}{3+2x}-\frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}=\frac{(4x-3)\cdot(3+2x)}{(3-2x)\cdot(3+2x)}-\frac{(4+5x)\cdot(3-2x)}{(3+2x)\cdot(3-2x)}-\frac{3+x-10x^2}{-(9-4x^2)}=$$

$$=\frac{12x+8x^2-9-6x-\left(12-8x+15x-10x^2\right)+3+x-10x^2}{(3+2x)\cdot(3-2x)}=\frac{8x^2-18}{(3+2x)\cdot(3-2x)}=$$

$$=\frac{2\cdot(2x+3)\cdot(2x-3)}{-(2x+3)\cdot(2x-3)}=-2$$

$$\frac{x+3}{1+x}+\frac{2x-1}{1-x}-\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{x+3}{x+1}+\frac{2x-1}{-(x-1)}-\frac{x-3}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{(2x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{x-3}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2-x+3x-3-\left(2x^2+2x-x-1\right)-(x-3)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{-x^2+1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{-(x^2-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{-(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=-1$$

$$\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a}=\frac{4a^2-3a+5}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)}-\frac{(1-2a)\cdot(a-1)}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)}-\frac{6\cdot\left(a^2+a+1\right)}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)}=$$

$$=\frac{4a^2-3a+5-\left(a-1-2a^2+2a\right)-(6a^2+6a+6)}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)}=\frac{-12a}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)}=\frac{-12a}{a^3-1}=$$

$$=\frac{-12a}{-(1-a^3)}=\frac{12a}{1-a^3}$$

$$\frac{7}{8a^2-18b^2}+\frac{1}{2a^2+3ab}-\frac{1}{4ab-6b^2}=\frac{7}{2\cdot(2a+3b)\cdot(2a-3b)}+\frac{1}{a\cdot(2a+3b)}-\frac{1}{2b\cdot(2a-3b)}=$$

$$=\frac{7ab+4ab-6b^2-\left(2a^2+3ab\right)}{2ab\cdot(2a+3b)\cdot(2a-3b)}=\frac{8ab-6b^2-2a^2}{2ab\cdot(2a+3b)\cdot(2a-3b)}=\frac{2\cdot\left(4ab-3b^2-a^2\right)}{2ab\cdot(2a+3b)\cdot(2a-3b)}=$$

$$=\frac{4ab-3b^2-a^2}{ab\cdot(4a^2-9b^2)}$$

32. Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^2-4}{x+3}:\frac{x-2}{x+3}-2 \qquad \frac{b+5}{b^2-16}\cdot\left(1-\frac{9}{b+5}\right)$$

$$\frac{a^2-9}{a+2}:\left(1-\frac{5}{a+2}\right) \qquad \left(\frac{3-4x}{2x+1}+2\right):\frac{x}{2x+1}$$

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right) \qquad \left(2+\frac{x-1}{3x-1}\right)\cdot\left(\frac{1-x}{7x-3}+1\right)$$

<u>Megoldás:</u>
Vonjuk össze a zárójelben szereplő törteket, majd végezzük el a szorzásokat, illetve osztásokat.

$$\frac{x^2-4}{x+3}:\frac{x-2}{x+3}-2=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x-2}-2=x+2-2=x$$

$$\frac{b+5}{b^2-16}\cdot\left(1-\frac{9}{b+5}\right)=\frac{b+5}{(b-4)\cdot(b+4)}\cdot\left(\frac{b+5}{b+5}-\frac{9}{b+5}\right)=\frac{b+5}{(b-4)\cdot(b+4)}\cdot\frac{b-4}{b+5}=\frac{1}{b+4}$$

$$\frac{a^2-9}{a+2}:\left(1-\frac{5}{a+2}\right)=\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{a+2}:\left(\frac{a+2}{a+2}-\frac{5}{a+2}\right)=\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{a+2}:\frac{a-3}{a+2}=\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{a+2}\cdot\frac{a+2}{a-3}=a+3$$

$$\left(\frac{3-4x}{2x+1}+2\right):\frac{x}{2x+1}=\left(\frac{3-4x}{2x+1}+\frac{4x+2}{2x+1}\right)\cdot\frac{2x+1}{x}=\frac{5}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x}=\frac{5}{x}$$

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)=\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{(1-a)\cdot(1+a)}{(1-2a)\cdot(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}$$

$$\left(2+\frac{x-1}{3x-1}\right)\cdot\left(\frac{1-x}{7x-3}+1\right)=\frac{6x-2+x-1}{3x-1}\cdot\frac{1-x+7x-3}{7x-3}=\frac{7x-3}{3x-1}\cdot\frac{6x-2}{7x-3}=\frac{7x-3}{3x-1}\cdot\frac{2\cdot(3x-1)}{7x-3}=2$$

33. Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{\frac{1+2x}{4+2x}-\frac{x}{3x-6}+\frac{\frac{2}{3}x^2}{4-x^2}}{\frac{6+13x}{24-12x}}$$

$$\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$$

$$\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right):\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)$$

$$\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$$

$$\left(\frac{x+5}{2x-10}-\frac{x-5}{2x+10}-\frac{50}{25-x^2}\right)\cdot\frac{x-5}{5x}$$

$$\left(a+b+\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right):\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\left(\frac{2a+2}{a^2+2a}+\frac{a}{2a+4}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}-\frac{1}{a}$$

$$(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right)$$

$$\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

$$\left(\frac{a^2-3ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$$

$$c-\left[\frac{c\cdot(16-c)}{c^2-4}+\frac{3+2c}{2-c}-\frac{2-3c}{c+2}\right]:\frac{c-1}{c^3+4c^2+4c}$$

$$\left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+2xy+y^2}+\frac{2}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{x-y}{x^3y^3}$$

Megoldás:

Vonjuk össze a zárójelben szereplő törteket, majd végezzük el a szorzásokat, illetve osztásokat.

$$\frac{\frac{1+2x}{4+2x}-\frac{x}{3x-6}+\frac{\frac{2}{3}x^2}{4-x^2}}{\frac{6+13x}{24-12x}}=\frac{\frac{1+2x}{2\cdot(2+x)}-\frac{x}{3\cdot(x-2)}+\frac{\frac{2}{3}x^2}{(2-x)\cdot(2+x)}}{\frac{6+13x}{12\cdot(2-x)}}=\frac{3\cdot(1+2x)\cdot(2-x)+2x\cdot(2+x)+4x^2}{6\cdot(2-x)\cdot(2+x)}\cdot\frac{12\cdot(2-x)}{6+13x}=$$

$$=\frac{6-3x+12x-6x^2+4x+2x^2+4x^2}{6\cdot(2-x)\cdot(2+x)}\cdot\frac{12\cdot(2-x)}{6+13x}=\frac{13x+6}{6\cdot(2-x)\cdot(2+x)}\cdot\frac{12\cdot(2-x)}{6+13x}=\frac{2}{2+x}$$

$$\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}=\frac{(a+1)\cdot(a+1)+6-(a+3)\cdot(a-1)}{2\cdot(a-1)\cdot(a+1)}\cdot\frac{4\cdot(a-1)\cdot(a+1)}{3}=$$

$$=\frac{a^2+2a+1+6-(a^2-a+3a-3)}{2\cdot(a-1)\cdot(a+1)}\cdot\frac{4\cdot(a-1)\cdot(a+1)}{3}=\frac{10}{2\cdot(a-1)\cdot(a+1)}\cdot\frac{4\cdot(a-1)\cdot(a+1)}{3}=\frac{20}{3}$$

$$\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right):\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)=\frac{a+1+a-1}{(a-1)\cdot(a+1)}:\frac{a+1-a+1}{(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{2a}{(a-1)\cdot(a+1)}\cdot\frac{(a-1)\cdot(a+1)}{2}=a$$

$$\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)=\frac{5a\cdot(a-x)+5x\cdot(a+x)+10ax}{(a-x)\cdot(a+x)}\cdot\frac{a\cdot(a-x)+x\cdot(a+x)-2ax}{(a-x)\cdot(a+x)}=$$

$$=\frac{5a^2-5ax+5ax+5x^2+10ax}{(a-x)\cdot(a+x)}\cdot\frac{a^2-ax+ax+x^2-2ax}{(a-x)\cdot(a+x)}=\frac{5\cdot(a+x)^2}{(a-x)\cdot(a+x)}\cdot\frac{(a-x)^2}{(a-x)\cdot(a+x)}=5$$

$$\left(\frac{x+5}{2x-10}-\frac{x-5}{2x+10}-\frac{50}{25-x^2}\right)\cdot\frac{x-5}{5x}=\left(\frac{x+5}{2x-10}-\frac{x-5}{2x+10}+\frac{50}{x^2-25}\right)\cdot\frac{x-5}{5x}=$$

$$=\frac{x^2+10x+25-\left(x^2-10x+25\right)+100}{2\cdot(x-5)\cdot(x+5)}\cdot\frac{x-5}{5x}=\frac{20x+100}{2\cdot(x-5)\cdot(x+5)}\cdot\frac{x-5}{5x}=$$

$$=\frac{20\cdot(x+5)}{2\cdot(x-5)\cdot(x+5)}\cdot\frac{x-5}{5x}=\frac{2}{x}$$

$$\left(a+b+\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right):\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-ab+ab-b^2+a^2+2ab+b^2}{a-b}\cdot\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a+b)^2}=$$

$$=\frac{2a\cdot(a+b)}{a-b}\cdot\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a+b)^2}=2a$$

$$\left(\frac{2a+2}{a^2+2a}+\frac{a}{2a+4}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}-\frac{1}{a}=\frac{4a+4+a^2}{2a\cdot(a+2)}\cdot\frac{2\cdot(a+1)}{a+2}-\frac{1}{a}=\frac{(a+2)^2}{2a\cdot(a+2)}\cdot\frac{2\cdot(a+1)}{a+2}-\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1$$

$$(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot\frac{x+1-(x-1)+x^2-1}{(x-1)\cdot(x+1)}=x^2+1$$

$$\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{1-x+2x}{(1-x)\cdot(1+x)}\cdot\frac{1-x}{x}=\frac{1+x}{(1-x)\cdot(1+x)}\cdot\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{a^2-3ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=\frac{a^2-3ab+ab+b^2}{a+b}:\frac{a\cdot(a-b)+b\cdot(a+b)-2ab}{(a-b)\cdot(a+b)}=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{a+b}\cdot\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a-b)^2}=a-b$$

$$c-\left[\frac{c\cdot(16-c)}{c^2-4}+\frac{3+2c}{2-c}-\frac{2-3c}{c+2}\right]:\frac{c-1}{c^3+4c^2+4c}=c-\frac{16c-c^2-(3+2c)\cdot(c+2)-(2-3c)\cdot(c-2)}{(c-2)\cdot(c+2)}\cdot\frac{c\cdot(c^2+4c+4)}{c-1}=$$

$$=c-\frac{c-2}{(c-2)\cdot(c+2)}\cdot\frac{c\cdot(c+2)^2}{c-1}=c-\frac{c\cdot(c+2)}{c-1}=\frac{c^2-c-c^2-2c}{c-1}=\frac{3c}{1-c}$$

$$\left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+2xy+y^2}+\frac{2}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{x-y}{x^3y^3}=\left[\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2}{(x+y)^3}\cdot\frac{y+x}{xy}\right]\cdot\frac{x^3y^3}{x-y}=$$

$$=\left[\frac{y^2+x^2}{x^2y^2\cdot(x+y)^2}+\frac{2}{xy\cdot(x+y)^2}\right]\cdot\frac{x^3y^3}{x-y}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2\cdot(x+y)^2}\cdot\frac{x^3y^3}{x-y}=\frac{xy}{x-y}$$

34. Az a és a b számokra teljesülnek a következő feltételek: $a\neq 0$; $b\neq 0$; $a\neq b$ és $\left(a-\frac{ab}{a-b}\right):\left(\frac{ab}{a-b}-b\right)-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\left(2-\frac{b}{a}\right)=-6$. Számítsd ki a $\frac{3a-2b}{a+b}$ kifejezés értékét!

Megoldás:
Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$\left(a-\frac{ab}{a-b}\right):\left(\frac{ab}{a-b}-b\right)-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\left(2-\frac{b}{a}\right)=\frac{a^2-ab-ab}{a-b}:\frac{ab-ab+b^2}{a-b}-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\frac{2a-b}{a}=$$

$$=\frac{a^2-2ab}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b^2}-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\frac{2a-b}{a}=\frac{a^2-2ab}{b^2}-\frac{2a^2-ab}{2b^2}=\frac{2a^2-4ab-2a^2+ab}{2b^2}=\frac{-3ab}{2b^2}=-\frac{3a}{2b}$$

Ekkor a feladat feltételét behelyettesítve a következőt kapjuk: $-\frac{3a}{2b}=-6$.

Ebből fejezzük ki valamelyik ismeretlent: $a=4b$.

Ezek alapján a megoldás: $\frac{3a-2b}{a+b}=\frac{3\cdot 4b-2b}{4b+b}=\frac{10b}{5b}=2$.

35. Bizonyítsd be, hogy a $\frac{80a}{4a-10} : \left(\frac{2a+5}{2a-5} - \frac{2a-5}{2a+5}\right)$ kifejezés értke minden egész a esetén páratlan szám!

Megoldás:
Írjuk fel a törtek értelmezési tartományát: $a \neq \frac{5}{2}$ és $a \neq -\frac{5}{2}$.

Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$\frac{80a}{4a-10} : \left(\frac{2a+5}{2a-5} - \frac{2a-5}{2a+5}\right) = \frac{80a}{2\cdot(2a-5)} : \left[\frac{(2a+5)\cdot(2a+5)}{(2a-5)\cdot(2a+5)} - \frac{(2a-5)\cdot(2a-5)}{(2a+5)\cdot(2a-5)}\right] =$$

$$= \frac{80a}{2\cdot(2a-5)} : \frac{4a^2+20a+25-(4a^2-20a+25)}{(2a-5)\cdot(2a+5)} = \frac{80a}{2\cdot(2a-5)} \cdot \frac{(2a-5)\cdot(2a+5)}{40a} = 2a+5$$

Mivel az értelmezési tartománynak minden egész megfelel, illetve a kapott kifejezésben egy páros számhoz adunk hozzá 5 – öt, így teljesül az állítás.

36. Tudjuk, hogy $a+b=5$ és $ab=-3$. Számítsd ki az a^2+b^2 értékét!

Megoldás:
Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$a^2+b^2 = a^2+2ab+b^2-2ab = (a+b)^2-2ab.$$

Ezek alapján a megoldás: $a^2+b^2 = 5^2-2\cdot(-3) = 31$.

37. Tudjuk, hogy $a-b=2$ és $ab=7$. Számítsd ki az a^3-b^3 értékét!

Megoldás:
Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) = (a-b)\cdot[a^2-2ab+b^2+3ab] =$$

$$= (a-b)\cdot[(a-b)^2+3ab]$$

Ezek alapján a megoldás: $a^3-b^3 = 2\cdot(2^2+3\cdot7) = 50$.

38. Számítsd ki a következő kifejezés értékét, ha $\boldsymbol{a+b=1}$!

$$\boldsymbol{a^3+b^3+3\cdot(a^3b+ab^3)+6\cdot(a^3b^2+a^2b^3)}$$

Megoldás:
Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$a^3+b^3+3\cdot(a^3b+ab^3)+6\cdot(a^3b^2+a^2b^3)=$$

$$=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)+3ab\cdot(a^2+b^2)+6a^2b^2\cdot(a+b)=$$

$$=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)+3ab\cdot(a^2+2ab+b^2-2ab)+6a^2b^2\cdot(a+b)=$$

$$=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)+3ab\cdot[(a+b)^2-2ab]+6a^2b^2\cdot(a+b)$$

Ekkor a feladat feltételét behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$1\cdot(a^2-ab+b^2)+3ab\cdot[1^2-2ab]+6a^2b^2\cdot 1=$$

$$=a^2-ab+b^2+3ab-6a^2b^2+6a^2b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

Ezek alapján a megoldás: $a^3+b^3+3\cdot(a^3b+ab^3)+6\cdot(a^3b^2+a^2b^3)=1^2=1$.

39. Bizonyítsd be, hogy ha $\boldsymbol{x+y+z=0}$, akkor $\boldsymbol{x^3+x^2z-xyz+y^2z+y^3=0}$!

Megoldás:
A feltételből a következőket kapjuk: $x+y=-z;\, y+z=-x;\, x+z=-y$.

Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$x^3+x^2z-xyz+y^2z+y^3=x^2\cdot(x+z)-xyz+y^2\cdot(z+y)$$

Ekkor a feladat feltételét behelyettesítve adódik a bizonyítandó állítás:

$$x^2\cdot(x+z)-xyz+y^2\cdot(z+y)=x^2\cdot(-y)-xyz+y^2\cdot(-x)=-x^2y-xy^2-xyz=$$

$$=-xy\cdot(x+y)-xyz=-xy\cdot(-z)-xyz=xyz-xyz=0$$

40. Mennyi lehet az $x+\frac{1}{x}$ értéke, ha $x-\frac{1}{x}=1$?

Megoldás:
Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$$

Ekkor a feladat feltételét behelyettesítve a következőt kapjuk: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=1^2+4=5$.

Ezek alapján a megoldás: $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$, vagy $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$.

41. Írd fel két polinom hányadosaként a következő kifejezést!

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-d \qquad (a;b;c\neq 0)$$

Megoldás:
Írjuk fel a kifejezést egyetlen tört segítségével:

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-d=\frac{a^2c}{abc}-\frac{ab^2}{abc}+\frac{bc^2}{abc}-\frac{abcd}{abc}=\frac{a^2c-ab^2+bc^2-abcd}{abc}$$

42. A parciális törtekre bontás segítségével határozd meg a $\frac{13x-8}{(x-2)\cdot(7x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{7x+4}$ kifejezésben az A és B értékét!

Megoldás:
Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$\frac{13x-8}{(x-2)\cdot(7x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{7x+4}=\frac{A\cdot(7x+4)}{(x-2)\cdot(7x+4)}+\frac{B\cdot(x-2)}{(7x+4)\cdot(x-2)}=$$

$$=\frac{7Ax+4A+Bx-2B}{(x-2)\cdot(7x+4)}=\frac{(7A+B)\cdot x+4A-2B}{(x-2)\cdot(7x+4)}$$

Ebből a következők adódnak: $7A+B=13$ és $4A-2B=-8$.

Ezek alapján a megoldás: $A=1$ és $B=6$.

43. Határozd meg a és b értékét, ha tudjuk, hogy minden $x \neq \frac{1}{2}; x \neq 3$ esetén teljesül az $\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+3}$ összefüggés!

Megoldás:
Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{a\cdot(x+3)}{(2x-1)\cdot(x+3)} + \frac{b\cdot(2x-1)}{(x+3)\cdot(2x-1)} =$$

$$= \frac{ax+3a+b\cdot 2x-b}{2x^2-x+6x-3} = \frac{x\cdot(a+2b)+3a-b}{2x^2+5x-3}$$

Ebből a következők adódnak: $a+2b=0$ és $3a-b=5$.

Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent: $a=-2b$.

Ezt helyettesítsük a második egyenletbe, s rendezés után a következőt kapjuk: $b=-\frac{5}{7}$.

Ezek alapján a megoldás: $a=\frac{10}{7}$ és $b=-\frac{5}{7}$.

44. Számítsd ki a $7x^6+3x^5-x^4+5x^2+2x-1$ polinom $x=-2$ helyettesítési értékét a Horner – elrendezés segítségével!

Megoldás:
Készítsünk egy 3 soros táblázatot a következők szerint: az első sorba az együtthatókat, a másodikba az x – be helyettesített érték és a harmadik sor balra eső elemének szorzatát, a harmadik sorba pedig az első két sor elemeinek az összegét írjuk be.

7	3	−1	0	5	2	−1
−	−14	22	−42	84	−178	352
7	−11	21	−42	89	−176	351

Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$7x^6+3x^5-x^4+5x^2+2x-1 = \left(\left(\left((7x+3)x-1\right)x^2+5\right)x+2\right)x-1$$

Ezek alapján a megoldás: 351.

45. Mennyi az együtthatók összege az $\left(7x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2\right)^{2017}$ kifejezés polinom alakjában?

Megoldás:
A polinomban az együtthatók összegét megkapjuk, ha a változó helyére 1 – et helyettesítünk.

Ezek alapján a megoldás: $x = 1$ esetén $(7 - 6 + 5 - 4 - 3 - 2 + 2)^{2017} = (-1)^{2017} = -1$.

46. Végezd el a következő polinom osztásokat!

a) $(\boldsymbol{x^8 + x^4 + 1}) : (\boldsymbol{x^2 + x + 1})$

b) $(\boldsymbol{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 6}) : (\boldsymbol{x + 2})$

Megoldás:
Az osztásokat a maradékos osztáshoz hasonlóan végezzük el.

a) Első esetben megnézzük az x^2 - et mivel kell megszoroznunk, hogy x^8 - t kapjunk, s ez x^6 lesz. Ezt követően x^6 - nal visszaszorozzuk az $(x^2 + x + 1)$ - et, majd a kapott kifejezést az előző alá írjuk. Ezután a két kifejezést kivonjuk egymásból. Az eljárást addig kell folytatnunk, míg a kivonás után kapott kifejezés fokszáma kisebb nem lesz, mint az osztó kifejezés fokszáma. Ekkor az utolsó kivonásnál kapott kifejezés lesz az osztás maradéka.

$(x^8 + x^4 + 1) : (x^2 + x + 1) = x^6 - x^5 + x^3 - x + 1$
$\underline{x^8 + x^7 + x^6}$

$-x^7 - x^6 + x^4 + 1$
$\underline{-x^7 - x^6 - x^5}$

$x^5 + x^4 + 1$
$\underline{x^5 + x^4 + x^3}$

$-x^3 + 1$
$\underline{-x^3 - x^2 - x}$

$x^2 + x + 1$
$\underline{x^2 + x + 1}$
0

Ezek alapján a megoldás: $x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^6 - x^5 + x^3 - x + 1)$.

b) Első esetben megnézzük az x - et mivel kell megszoroznunk, hogy x^4 - t kapjunk, s ez x^3 lesz. Ezt követően x^3 - nal visszaszorozzuk az $(x+2)$ - t, majd a kapott kifejezést az előző alá írjuk. Ezután a két kifejezést kivonjuk egymásból. Az eljárást addig kell folytatnunk, míg a kivonás után kapott kifejezés fokszáma kisebb nem lesz, mint az osztó kifejezés fokszáma. Ekkor az utolsó kivonásnál kapott kifejezés lesz az osztás maradéka.

$(x^4+3x^3+3x^2+x+6):(x+2)=x^3+\ x^2+\ x-1$
$\underline{x^4+2x^3\qquad\qquad\qquad}$

$x^3+\ 3x^2+\ x+6$
$\underline{x^3+2x^2\qquad\qquad}$

x^2+x+6
$\underline{x^2+2x\qquad}$

$-x+6$
$\underline{-x-2\quad}$
8

Ezek alapján a megoldás:

$x^4+3x^3+3x^2+x+6=(x+2)\cdot(x^3+\ x^2+x-1)+8$

47. Egyszerűsítsd a következő törtet a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2-y^2}$$

Megoldás:
Először alakítsuk szorzattá a nevezőt: $x^2-y^2=(x+y)\cdot(x-y)$.

Végezzünk polinom osztást a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezésekkel.

$(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3):(x+y)=x^2+2xy+\ y^2$
$\underline{x^3+x^2y\qquad\qquad\qquad}$

$2x^2y+\ 3xy^2+\ y^3$
$\underline{2x^2y+2xy^2\qquad\qquad}$

$xy^2 + y^3$
$\underline{xy^2 + y^3}$
0

Ebből adódik a következő: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2)$

Az $(x - y)$ – nal történő osztás során a maradék nem 0 lesz, így azt nem alkalmazhatjuk a szorzattá alakításhoz.

Ezek alapján a megoldás:

$$\frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{x^2 - y^2} = \frac{(x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2)}{(x + y) \cdot (x - y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y} = \frac{(x + y)^2}{x - y}.$$

48. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igaz vagy hamis!

A: Bármely két irracionális szám között van racionális szám.

B: Bármely két racionális szám között van irracionális szám.

C: Van legkisebb pozitív irracionális szám.

D: Van legnagyobb racionális szám.

E: Két irracionális szám összege lehet racionális.

F: Két irracionális szám szorzata lehet racionális.

G: Két irracionális szám különbsége lehet racionális.

H: Egy racionális és egy irracionális szám összege racionális.

I: Egy racionális (nem 0) és egy irracionális szám szorzata irracionális.

J: Egy irracionális és egy (nem 0) racionális szám hányadosa irracionális.

K: Lehet egy racionális és egy irracionális szám különbsége racionális.

<u>Megoldás:</u>
A megoldások a következők: $I; I; H; H; I; I; I; H; I; I; I$.

49. Egy farmer lovat vásárolt 60 dollárért és eladta a szomszédjának 70 – ért. Később rájött, hogy jobb üzletet is csinálhatott volna, ezért kölcsönkért a feleségétől 10 dollárt, visszavásárolta a lovat a szomszédtól 80 dollárért, és eladta a másik szomszédjának 90 – ért. Mennyit keresett az üzleten?

Megoldás:
A farmernek eredetileg volt 60 dollárja, s a végén lett 90. Mivel azonban a feleségének visszaadta a kölcsönkért 10 dollárt, így az üzletből 20 dollár haszna maradt.

50. Egy szállodában három barát kibérelt 30 dollárért egy lakosztályt, s fejenként $10 - 10$ dollárt adtak a szolgának. Mikor azonban a szolga átadta az összeget a tulajdonosnak, az rájött, hogy a lakosztály csak 25 dollár, s így visszaküldött 5 darab egydollárost. A szolga felfele menet azon gondolkodott, hogy nem tudja szétosztani az 5 darab érmét a három utazó között, így 2 - t zsebre tett, az embereknek pedig visszaadott fejenként $1 - 1$ dollárt. Így végül mindenki 9 dollárt fizetett, ami $3 \cdot 9 = 27$ dollár, illetve 2 dollár maradt a zsebben, s ez összesen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ dollár. Hova tűnt a harmincadik dollár?

Megoldás:
A kérdés megfogalmazása helytelen, mert a 27 dollárból le kell vonni a 2 dollárt, s így marad a lakosztály 25 dolláros ára.