Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Algebra

Műveletek tulajdonságai:

- kommutativitás (felcserélhetőség): $a + b = b + a; a \cdot b = b \cdot a$
- asszociativitás (átcsoportosíthatóság): $(a + b) + c = a + (b + c); a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- disztributivitás (széttagolhatóság): $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (szorzás az összeadásra nézve)

Műveletek sorrendje:

- Ha a műveletsor csak összeadást és kivonást tartalmaz, akkor azokat balról jobbra haladva kell végrehajtanunk. Ezek a műveletek egyenrangúak.
- Ha a műveletsor csak szorzást és osztást tartalmaz, akkor azokat balról jobbra haladva kell végrehajtanunk. Ezek a műveletek egyenrangúak.
- Ha a műveletsor tartalmazza mind a 4 alapműveletet és hatványozást is egyszerre, akkor először a hatványozást kell elvégeznünk, majd a szorzást és osztást, végül pedig az összeadást és kivonást. A hatványozás (gyökvonás) a legmagasabb rangú művelet.
- Ha a műveletsor zárójelet is tartalmaz, akkor először a zárójelen belül szereplő műveleteket kell elvégeznünk az előző pontban foglaltak szerint, majd ezután a többi műveletet.
- Ha a műveletsor több zárójelet is tartalmaz egymásba foglalva, akkor először a legbelső zárójelben levő műveletet célszerű elvégeznünk.

DEFINÍCIÓ: (Inverz művelet)
Azt a műveletet, ahol adott az eredeti művelet eredménye és az eredetileg adott két mennyiség közül az egyik (a másikat pedig keressük), inverz műveletnek nevezzük.

Megjegyzés:
Az összeadás inverz művelete a kivonás, a szorzásé pedig az osztás.

DEFINÍCIÓ: (Algebrai kifejezés)
Ha az algebrai mennyiségeket (számokat és betűket), illetve azok egész kitevőjű hatványát és gyökét a négy alapművelet véges számú alkalmazásával kötjük össze, akkor algebrai kifejezésről beszélünk.

<u>*Megjegyzés:*</u>

- *Az algebrai kifejezésben előforduló betűket változóknak (ismeretlennek) nevezzük, melyek egy alaphalmaz elemeit helyettesítik.*
- *Az algebrai kifejezésben előforduló számokat (a változók szorzótényezőit) együtthatóknak nevezzük.*
- *Az együtthatók és változók közötti szorzás jelet általában elhagyjuk:* $7 \cdot x = 7x$.
- *Példa:* $2x^3 - 3y$ *→ együtthatók:* 2 *és* 3*; változók:* x *és* y

DEFINÍCIÓ: (Alaphalmaz)
Az algebrai kifejezésben szereplő betűk helyére helyettesíthető számok azon halmazát, melyekre a kifejezést vizsgáljuk, alaphalmaznak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Értelmezési tartomány)
Az algebrai kifejezésben szereplő betűk helyére helyettesíthető számok azon halmazát, melyekre a műveletek elvégezhetők, értelmezési tartománynak nevezzük.

<u>*Megjegyzés:*</u>

- *Az értelmezési tartomány az alaphalmaz egy részhalmaza.*
- *Példa:* $\frac{1}{x}$ *esetén az alaphalmaz lehet* $\mathbb{R}$*, de az értelmezési tartomány* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*, mert a* 0 *– val való osztást nem értelmezzük.*

DEFINÍCIÓ: (Helyettesítési érték)
Ha az algebrai kifejezésben előforduló változók helyére az alaphalmaz elemeit írjuk és ezekkel elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor az algebrai kifejezés helyettesítési értékét kapjuk meg.

<u>*Megjegyzés:*</u>
Helyettesítési értéket csak az értelmezési tartományba tartozó elemek esetén számolhatunk.

DEFINÍCIÓ: (Értékkészlet)
Azon értékek halmazát, melyeket a betűk helyébe számokat helyettesítve a műveletek elvégzése után kapunk, értékkészletnek nevezzük.

<u>*Megjegyzés:*</u>
Példa: $4x$ *esetén, ha az értelmezési tartomány* $\{-1; 0; 1; 2\}$*, akkor az értékkészlet* $\{-4; 0; 4; 8\}$.

DEFINÍCIÓ: (Azonos algebrai kifejezések)
Két algebrai kifejezést azonosnak tekintünk, ha az alaphalmaz bármely elemét helyettesítjük be a változók helyére, a helyettesítési értékük mindig megegyezik.

Megjegyzés:
Példa: $x + 3x = 4x$, *de* $\frac{2x^2}{x} \neq 2x$, *mert az* $x = 0$ *nem értelmezhető az első kifejezésre.*

DEFINÍCIÓ: (Algebrai egész - Algebrai tört)
Ha az algebrai kifejezésben nincs tört, illetve az előforduló törtek nevezőjében nincs változó, akkor algebrai egész kifejezésről beszélünk. Ellenkező esetben algebrai törtnek nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Egy tagú - több tagú algebrai kifejezés)
Azokat az algebrai kifejezéseket, melyekben a számokat és a számokat helyettesítő betűket, illetve azok pozitív egész kitevőjű hatványait csak a szorzás műveletével kötjük össze, egy tagú algebrai kifejezésnek nevezzük. Ellenkező esetben többtagú algebrai kifejezésről beszélünk.

DEFINÍCIÓ: (Egynemű - különnemű algebrai kifejezés)
Azokat az egytagú algebrai kifejezéseket, amelyek legfeljebb együtthatókban különböznek egymástól, egynemű algebrai kifejezéseknek nevezzük. Ellenkező esetben az algebrai kifejezést különneműnek nevezzük.

Megjegyzés:

- *A különnemű algebrai kifejezésekben az egyes változók nem ugyanazon a hatványon fordulnak elő, vagy nem ugyanazok a változók.*
- *Az egynemű algebrai kifejezések összevonhatók: Az összevonást úgy végezzük el, hogy az együtthatókat összeadjuk (kivonjuk), a változókat nem módosítjuk.*
- *Példa:* $2x + 3y$ *különneműek;* $8x - 2x$ *egyneműek és összevont alakjuk* $6x$.

DEFINÍCIÓ: (Polinom)
Az olyan algebrai kifejezést, amelyben a változókon véges számú összeadást, kivonást, szorzást és nem negatív egész kitevőjű hatványozást végzünk, polinomnak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Polinom fokszáma)
Egy tagú polinom fokszámán a változók kitevőinek összegét, többtagú polinom fokszámán pedig a legnagyobb fokszámú tag fokszámát értjük.

Megjegyzés:
A polinom tagjait célszerű csökkenő fokszám szerint rendezni.

DEFINÍCIÓ: (Hatványozás)
Legyen x egy valós szám, n pedig egy pozitív egész szám. Ekkor x^n – t az x szám n – edik hatványának nevezzük, ahol az x^n kifejezés olyan n tényezős szorzatot jelöl, amelynek minden tényezője x. Jelöléssel: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}_{n\ db}$.

Megjegyzés:

- *Az x – et hatványalapnak, az n – et hatványkitevőnek, az x^n – t hatványértéknek nevezzük.*
- *Minden valós szám első hatványa önmaga. Jelöléssel: $x^1 = x$.*
- *Minden 0 – tól különböző valós szám nulladik hatványa 1. Jelöléssel: $x^0 = 1$.*
- *Mivel 0 minden hatványa 0, s minden szám nulladik hatványa 0, ezért az egyértelműség miatt, a 0^0 hatványt nem értelmezzük.*

Hatványozás azonosságai:

TÉTEL:
Azonos alapú hatványok szorzata megegyezik azzal a hatvánnyal, amelynél a közös alapot a kitevők összegére emeljük. Jelöléssel: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ $(x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

Megjegyzés:
Példa: $2^7 \cdot 2^8 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{7\ darab} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{8\ darab} = 2^{15}$

TÉTEL:
Azonos alapú hatványok osztása megegyezik azzal a hatvánnyal, amelynél a közös alapot a számláló és a nevező kitevőjének különbségére emeljük.
Jelöléssel: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

Megjegyzés:
Példa: $\frac{3^{14}}{3^{10}} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3}^{14\ darab}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3}_{10\ darab}} = 3^4$

TÉTEL:
Hatvány hatványa megegyezik azzal a hatvánnyal, amelynél az alapot a kitevők szorzatára emeljük. Jelöléssel: $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ $(x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

Megjegyzés:
Példa: $(5^8)^3 = (5^8) \cdot (5^8) \cdot (5^8) = \underbrace{(5 \cdot \ldots \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 5)}_{3 \cdot 8\, darab} = 5^{24}$

TÉTEL:
Szorzat hatványa megegyezik a tényezők hatványának szorzatával.
Jelöléssel: $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ $(x, y \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}^+)$.

Megjegyzés:
Példa: $(2 \cdot 3)^9 = \underbrace{(2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 3)}_{9\, darab} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2)}_{9\, darab} \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3)}_{9\, darab} = 2^9 \cdot 3^9$

TÉTEL:
Tört hatványa megegyezik a számláló és a nevező hatványának hányadosával.
Jelöléssel: $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} (x, y \in \mathbb{R}; y \neq 0; m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

Megjegyzés:

Példa: $\left(\frac{6}{7}\right)^{11} = \underbrace{\frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7}}_{11\, darab} = \frac{\overbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 6}^{11\, darab}}{\underbrace{7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 7}_{11\, darab}} = \frac{6^2}{7^2}$

DEFINÍCIÓ: (Negatív egész kitevőjű hatvány)
Egy 0 – tól különböző valós szám negatív egész kitevőjű hatványa megegyezik a szám reciprokának ellentett kitevőjű hatványával. Jelöléssel: $x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$.

Megjegyzés:

- *A hatvány fogalmának ilyen módon történő kibővítésénél megjelenik a permanencia – elv: a korábban megismert tételek érvényben maradnak az újabb kitevőkön is.*

- *Példa:* $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}; \left(-\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$.

<u>Nevezetes azonosságok (szorzatok):</u>

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

<u>Megjegyzés:</u>
Példa: $(7x-2y)^2 = (7x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 2y + (2y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2$

TÉTEL:

- $(a+b)^n = x_1 \cdot a^n b^0 + x_2 \cdot a^{n-1} b^1 + \cdots + x_n \cdot a^1 b^{n-1} + x_{n+1} \cdot a^0 b^n$
- $(a-b)^n = x_1 \cdot a^n b^0 - x_2 \cdot a^{n-1} b^1 + \cdots + x_n \cdot a^1 b^{n-1} - x_{n+1} \cdot a^0 b^n$

<u>Megjegyzés:</u>

- *Az $x_1, \ldots, x_{n+1}$ együtthatókat a Pascal-háromszög segítségével könnyedén kiszámíthatjuk:*

$$\begin{array}{llccccccccccc}
(a \pm b)^0 & \rightarrow & & & & & & 1 & & & & & \\
(a \pm b)^1 & \rightarrow & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(a \pm b)^2 & \rightarrow & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
(a \pm b)^3 & \rightarrow & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
(a \pm b)^4 & \rightarrow & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
(a \pm b)^5 & \rightarrow & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

- *Példa:* $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

TÉTEL:

- $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \dots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$
- $a^n + b^n = (a+b) \cdot (a^{n-1}b^0 - a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 - \dots - a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$

Megjegyzés:

- *Az $a^n + b^n$ – re vonatkozó összefüggés csak akkor teljesül, ha n egy páratlan szám.*
- *Mindkét esetben az együtthatók rendre* 1 *- esek lesznek.*
- *Példa:* $x^5 + y^5 = (x+y) \cdot (x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

Teljes négyzetté alakítás:
A kifejezést úgy alakítjuk, hogy a változó csak egy kéttagú kifejezés négyzetében forduljon elő.

Megjegyzés:
Példa: $x^2 + 24x - 103 = (x+12)^2 - 144 - 103 = (x+12)^2 - 247.$

Szorzattá alakítás módszerei:

- Kiemeléssel: az összeg tagjaiból az azonos szorzótényezőkkel osztva alakítunk ki szorzatot
- Nevezetes azonossággal
- Többszörös kiemeléssel (csoportosítással)
- Kiemeléssel és nevezetes azonossággal (teljes négyzetté kiegészítéssel)

Megjegyzés:
Példa: szorzattá alakítás kiemeléssel → $8x^3 - 12x^2 + 20xy = 4x \cdot (2x^2 - 3x + 5y).$

Többtagú kifejezések szorzata:
Többtagú kifejezéseket úgy szorzunk össze, hogy az egyik tényező minden tagjával megszorozzuk a másik tényező minden tagját.

Megjegyzés:
A szorzás során ügyelnünk kell az előjelekre (pl.: két negatív szorzata pozitív), illetve a szorzás elvégzése után célszerű az egynemű kifejezéseket összevonni, s a tagokat rendezni.

Algebrai törtek értelmezési tartományának vizsgálata:
A törtek nevezőjében szereplő kifejezések értéke nem lehet 0, mert a 0 – val való osztást nem értelmezzük. Amennyiben a nevezőben bonyolultabb kifejezés szerepel, akkor célszerű (ha lehet) azt szorzattá alakítani. Mivel egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért ezt követően a szorzat tényezői nem lehetnek egyenlők 0 - val.

Algebrai törtek egyszerűsítése:
Először (ha lehet) alakítsuk szorzattá a számlálóban és nevezőben levő kifejezést is. Ezt követően a számlálóban és nevezőben megjelenő közös tényezőkkel egyszerűsíthetjük a törtet.

Megjegyzés:
Az értelmezési tartomány vizsgálatát mindig az egyszerűsítés előtt kell végrehajtanunk, mert az egyszerűsítés után bővülhet az alaphalmaz.

Műveletek algebrai törtekkel:

- Összeadás, kivonás: A műveletek elvégzéséhez először közös nevezőre kell hoznunk a törteket, amihez a nevezők legkisebb közös többszörösét célszerű választanunk. A közös nevező meghatározásához célszerű (ha lehet) szorzattá alakítanunk a nevezőket. A közös nevező megállapítása után a törteket bővítsük úgy, hogy a nevezőjük a közös nevező legyen: amennyivel szorozzuk a nevezőt, annyival szorozzuk a számlálót is. Végül vonjuk össze a törteket, s a kapott törtet hozzuk a legegyszerűbb alakra.

- Szorzás, osztás: A műveletek elvégzéséhez először az osztást át kell írnunk szorzássá. Ezt követően a nevezőben és a számlálóban levő kifejezést is (ha lehet) alakítsuk szorzattá. Végül a szorzások elvégzése előtt, egyszerűsítsünk a megfelelő tényezőkkel.

Megjegyzés:

- *Összevonáskor figyelni kell arra, hogy a törtvonás zárójelet helyettesít, vagyis ha valamelyik tört előtt negatív jel szerepel, akkor a számlálóban levő kifejezést zárójelbe kell tennünk.*

- *Abban az esetben, ha két tag különbségére lenne szükségünk a közös nevezőhöz, de a két tört nevezőjében fordított sorrendben állnak a tagok, akkor ki kell emelnünk az egyik nevezőből* (-1) *– et. Ezt követően, ha a* (-1) *– szeres szorzót el szeretnénk hagyni a nevezőből, akkor a tört előjelét kell megváltoztatnunk. Példa:* $\frac{2}{x-y}=\frac{2}{-(y-x)}=-\frac{2}{y-x}$.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Számítsd ki a következő emeletes törtek pontos értékét!

$$\frac{5}{1-\frac{4}{3+\frac{2}{4\frac{1}{2}}}} \qquad 2-\frac{4}{3-\frac{5}{1+\frac{5}{\frac{3}{2}}}}$$

2. (K) Határozd meg, hogy a következő algebrai kifejezések közül, melyek egy tagúak; többtagúak; algebrai törtek; algebrai egészek; egyneműek egymással? Határozd meg a kifejezések együtthatóit!

$$\frac{a+b}{c} \qquad -\frac{c}{x} \qquad 7x+8y^7 \qquad \frac{ab^{11}}{3} \qquad \frac{10xy^7}{9} \qquad 2a \cdot 8b^{11} \qquad a-\frac{2}{y}$$

3. (K) Határozd meg a következő polinomok fokszámát!

$$6a^9b \qquad 7 \qquad -2x+3xy-4xyz \qquad 10xy^7+20y^2z^2+30xy^2z^3$$

4. (K) Határozd meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyeken!

a) $10xy-3z$, ha $x=-0,25;\ y=\frac{2}{5};\ z=-7$

b) $\frac{x+y}{z}-\frac{z}{2}-\frac{3x+1}{y}$, ha $x=-2;\ y=3;\ z=4$

5. (K) Végezz összevonást a következő kifejezésekben!

$$a^2+2ab+3a^2-5ab \qquad 5a+a^2b+4ab^2-b+11a^2b-ab^2+3b^3$$

6. (K) Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $5-(2a+3b)+(a-b+3)$

b) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z\right)-\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z\right)$

c) $4a^2-2ab-b^2-(-a^2+b^2-2ab)+(3a^2-ab+b^2)$

d) $\left(\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^3-1\right)-\left(3x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}x^2y-2xy^2\right)$

e) $9a^2+[7a^2-2a-(a^2-3a)]$

f) $3a-\{2c-[6a-(c-b)+c+(a+8b-6c]\}$

7. (K) Számítsd ki a következő hatványok pontos értékét!

7^3 $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ $(-2)^4$ -3^2 8^{-1} $\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}$ $0,1^{-4}$ $1,63^0$

8. (K) Döntsd el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

A: A negatív egész számok hatványai lehetnek pozitív és negatív értékek is.

B: Az egész számok minden egész kitevőjű hatványa egész.

C: Összeszorozva -1000 – től 1000 – ig az egész számokat az eredmény negatív lesz.

9. (K) Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

$2^5 \cdot 2 \cdot 2^4$ $(3^2)^3$ $\frac{2^7}{2^4}$ $(2^2 \cdot 3)^4$ $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ $\frac{3 \cdot 3^3}{(3^2)^{-1}}$

10. (K) Döntsd el számológép használata nélkül, hogy melyik kifejezés értéke nagyobb?

2^{-2} **vagy** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $3^4 + 3^5$ **vagy** 3^9 6^{12} **vagy** 12^8

$(5^6 + 5^6)^6$ **vagy** $(25^{10})^2$ $\frac{2}{3^{18}} + \frac{4}{3^{19}} - \frac{4}{3^{20}}$ **vagy** $\frac{1}{3^{17}}$ $\frac{7^{-10}}{5^{-1} \cdot 3^{11}}$ **vagy** $\frac{12 \cdot 3^{-10}}{7^{11}}$

11. (K) Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések értékét!

$\frac{5^5 \cdot (5^3)^8 \cdot (5 \cdot 3^7)^4 \cdot 3^{45}}{5^{29} \cdot 3^9 \cdot (3^6)^{11}}$ $\frac{(2^{-3})^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 8^{-1}}$ $\frac{5^{2017} \cdot 2^{2018}}{10^{2019}}$

$\frac{1000^{-3} \cdot (100^4)^5}{10^{31}}$ $\frac{480 \cdot 144}{64} : 360$ $\frac{2^9 \cdot 3^8 - 6^8 + 2^8 \cdot 3^7}{2^{10} + 2^{11}}$

12. (K) Végezd el az alábbi műveleteket! (Az eredményeket pozitív kitevőkkel add meg!)

$(x^2y^3z^{-4})^{-3} : (x^3yz^{-2})^3$ $\left(\frac{a^2bc^3}{x^{-2}y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^3b^{-2}c^{-2}}{x^2y^3}\right)^{-1}$ $\left(\frac{2p^3q^2r^{-3}}{x^5y^{-1}}\right)^4 : \left(\frac{p^{-1}q^{-2}r^2}{4x^{-2}y^3}\right)^{-2}$

13. (K) Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $3x^2y \cdot (2 + x - 4y^3 + xy)$

b) $(d^3 - d^2 + d - 1) \cdot (d + 1)$

c) $2a^2 - a \cdot (5b - 2a) + 4a \cdot \left(-3a + 2\frac{1}{2}b\right)$

d) $(a - 3) \cdot (a + 4) - (a - 2) \cdot (a + 5)$

e) $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (3 - 4x)$

14. (K) Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést, majd számold ki a helyettesítési értéket, ha $x = 3$ és $y = -2$!

$$xy^2 - \{-4x^3 - [2x^2y + 3 \cdot (2x - y) \cdot (x^2 + xy - y^3) - (3y^4 - 6xy^3)] + 5x^2y\}$$

15. (K) Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} : \frac{21}{32} - \frac{5}{6} \cdot 5$

$\left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) : \frac{35}{72}\right]^{-2} + \frac{63}{45} \cdot \frac{70}{42} - \left(1\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right)^{-1} + 2 \cdot \frac{7}{10}$

16. (K) Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét!

$\frac{10\,000 \cdot 10\,004 - 10\,002 \cdot 9998}{10\,000 \cdot 10\,001 - 10\,001 \cdot 9999}$

$\frac{1234321234321 \cdot 2468642468641 - 1234321234320}{1234321234320 \cdot 2468642468641 + 1234321234321}$

17. (K) Végezd el a következő műveleteket!

$(2 + x)^2$ $\quad$ $(5a - 3)^2$ $\quad$ $(x + 4y)^2$ $\quad$ $(7a - 10b)^2$

$(x + 3y) \cdot (x - 3y)$ $\quad$ $(2a - 6b) \cdot (6b + 2a)$ $\quad$ $\left(\frac{2}{3}x^7 + y\right) \cdot \left(y - \frac{2}{3}x^7\right)$

$(4 - a)^3$ $\quad$ $(6x + 5)^3$ $\quad$ $(2a + b)^3$ $\quad$ $(4x - 3y)^3$

18. (K) Add meg a hiányzó tagokat úgy, hogy teljes négyzeteket kapjunk!

$a^2 + \cdots + 9b^2$ $\quad$ $x^2 - 10xy + \cdots$ $\quad$ $... + 28ab + 49b^2$

$\frac{1}{36}x^2 - \cdots + \frac{4}{49}y^2$ $\quad$ $a^6b^4 - 2a^3b^3 + \cdots$ $\quad$ $\frac{16}{25}x^8 - \frac{24}{35}x^6 + \cdots$

19. (E) Végezd el a következő műveleteket!

$(a-b)^4$ $\quad(x+y)^5$ $\quad(3a+b+5c)^2$ $\quad(x-2y-z)^2$

$8a^3-b^3$ $\quad x^3+125y^3$ $\quad a^6-b^6$ $\quad x^5+32y^5$

$\left(a^{2n+1}-b^{5n-3}\right)\cdot\left(a^{2n+1}+b^{5n-3}\right)$ $\quad\left(2^n-n^k\right)^2$ $\quad(3+x+y)\cdot(3-x-y)$

20. (K) Alakítsd teljes négyzetté a következő kifejezéseket!

$x^2+4x-11$ $\quad x^2-12x+43$ $\quad 4x^2-12x+13$

$2x^2+16x-8$ $\quad 5x^2-20x-3$ $\quad 3x^2-30x+79$

21. (K) Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

$x^2-10x+25$ $\quad 49-28a+4a^2$

$121x^2-169y^2$ $\quad \frac{1}{16}a^2-\frac{9}{64}b^{10}$

$a^3+6a^2+12a+8$ $\quad 125x^3-75x^2y+15xy^2-y^3$

$12a+10ab-4a^2+2a^5$ $\quad 18a^5b-6a^3b^2+12a^4b^3$

$8x^2+24x+18$ $\quad 8a^2b^3-12a^4b^2+18a^6b$

$600x^3-54xy^4$ $\quad 1-x^8$

$12xy-24ay+72ab-36bx$ $\quad 4ax+7b-28a-bx$

22. (E) Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

x^3-8 $\quad 1000a^3+b^3$

$x^2+12x+11$ $\quad a^2-16a+15$

$6x^2+13x+7$ $\quad x^4+4$

$a^3+6a^2+11a+6$ $\quad x^4-2x^3-2x^2-2x-3$

23. (K) Határozd meg a következő törtek értelmezési tartományát!

$\frac{x}{a-5}$ $\quad \frac{2}{x-3y}$ $\quad \frac{7a+11}{5}$ $\quad \frac{2x}{ab-5a+2b-10}$ $\quad \frac{y-x}{9x^2-30xy+25y^2}$ $\quad \frac{7}{4a^2-81}$

24. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{143r^4s^8t^5}{66r^5s^2t^3} \qquad \frac{5a}{5a+15b} \qquad \frac{ik^3}{i^2k-ik^2}$$

$$\frac{5y+15}{6y+18} \qquad \frac{b-a}{a-b} \qquad \frac{5in-5jn}{15jm-15im}$$

$$\frac{2x+4}{x^2-4} \qquad \frac{3a^2-3}{7a+7} \qquad \frac{c^2-6c+9}{9-3c}$$

$$\frac{9x^2+18xy+9y^2}{12x^2-12y^2} \qquad \frac{4x^3y+4xy^3}{x^4-y^4} \qquad \frac{ax+bx-ay-by}{7x-7y}$$

25. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1} \qquad \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} \qquad \frac{3a+6}{a^3+8}$$

$$\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}} \qquad \frac{(x^2-y^2-z^2-2yz)\cdot(x+y-z)}{(x+y+z)\cdot(x^2+z^2-2xz-y^2)} \qquad \frac{(a+1)\cdot(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)\cdot(a^2+a+1)}$$

26. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(4a+b)\cdot(4a-b)-(3a+2b)^2+5b^2}{7a-12b} \qquad \frac{(3a-1)\cdot(2a+1)^2-3a\cdot(2a+3)^2+1}{-28a} \qquad \frac{(2x+1)^2-(3x-1)\cdot(3x+1)+5x^2}{2x+1}$$

27. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(a-b)^3-3ab\cdot(a+b)+b^3}{a-6b} \qquad \frac{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)+b^3-a^2}{a-1}$$

28. (K) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(2x)^2\cdot y}{6\cdot x^5\cdot x^7}\cdot\frac{\left(x^{-4}\right)^3}{\left(x^2\cdot y^6\right)^{-9}} \qquad \frac{6a^3}{5b^{-2}}\cdot\frac{10ab^8}{3a^5}:\frac{4b^{11}}{a^6} \qquad \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$$

$$\frac{x^2-25}{x^2-2x}:\frac{x^2+5x}{x^4-4x^2} \qquad \frac{5x^2-20y^2}{3x+6y}:\frac{5x-10y}{9x} \qquad \frac{2ab-a^2}{4b^2-a^2}\cdot\frac{6b+3a}{a}$$

29. (E) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$\frac{3a^2-6ab}{a^2+4b^2}\cdot\frac{a^4-16b^4}{15\cdot(a-2b)^2}$ $\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}\cdot\frac{2x+2}{x-2}$ $\frac{a^2-10a+25}{a^2-3a-10}:\frac{a-5}{4a+8}$

$\frac{x^3+27}{8x+6}\cdot\frac{12x+9}{x^2+6x+9}$ $\frac{3a^3+18a^2+27a}{5a+15}:\frac{a^3-9a}{10a-30}$ $\frac{a^2-5a+6}{a^2+7a+12}\cdot\frac{a^2+3a}{a^2-4a-4}$

30. (K) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$\frac{2a+5}{4}-\frac{2a-3}{5}$ $2a-\frac{a-b}{5}$ $\frac{2a-3b}{a^2b}-\frac{4a-5b}{ab^2}$

$\frac{5a}{6b^2c}+\frac{11c}{18a^2b}-\frac{7b}{12ac^2}$ $\frac{a+3}{a-1}+\frac{5-a}{a}$ $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a+2b}{b-a}$

31. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x+2}{2x^2-2}$ $4+\frac{6}{x-1}+\frac{2+2x}{1-x^2}$ $\frac{2a+1}{a+1}+\frac{a-2}{a-1}-\frac{3a^2-1}{a^2-1}$

$\frac{3x+1}{x}+\frac{2x-3}{x+1}-\frac{5x-2}{x-1}$ $\frac{1}{p-3}-\frac{3}{2p+6}-\frac{p}{2p^2-12p+18}$ $\frac{4x-3}{3-2x}-\frac{4+5x}{3+2x}-\frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$

$\frac{x+3}{1+x}+\frac{2x-1}{1-x}-\frac{x-3}{x^2-1}$ $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a}$ $\frac{7}{8a^2-18b^2}+\frac{1}{2a^2+3ab}-\frac{1}{4ab-6b^2}$

32. (K) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$\frac{x^2-4}{x+3}:\frac{x-2}{x+3}-2$ $\frac{b+5}{b^2-16}\cdot\left(1-\frac{9}{b+5}\right)$

$\frac{a^2-9}{a+2}:\left(1-\frac{5}{a+2}\right)$ $\left(\frac{3-4x}{2x+1}+2\right):\frac{x}{2x+1}$

$\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$ $\left(2+\frac{x-1}{3x-1}\right)\cdot\left(\frac{1-x}{7x-3}+1\right)$

33. (E) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{\frac{1+2x}{4+2x}-\frac{x}{3x-6}+\frac{\frac{2}{3}x^2}{4-x^2}}{\frac{6+13x}{24-12x}}$$

$$\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$$

$$\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right):\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)$$

$$\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$$

$$\left(\frac{x+5}{2x-10}-\frac{x-5}{2x+10}-\frac{50}{25-x^2}\right)\cdot\frac{x-5}{5x}$$

$$\left(a+b+\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right):\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\left(\frac{2a+2}{a^2+2a}+\frac{a}{2a+4}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}-\frac{1}{a}$$

$$(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right)$$

$$\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

$$\left(\frac{a^2-3ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$$

$$c-\left[\frac{c\cdot(16-c)}{c^2-4}+\frac{3+2c}{2-c}-\frac{2-3c}{c+2}\right]:\frac{c-1}{c^3+4c^2+4c}$$

$$\left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+2xy+y^2}+\frac{2}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{x-y}{x^3y^3}$$

34. (E) Az a és a b számokra teljesülnek a következő feltételek: $a\neq 0$; $b\neq 0$; $a\neq b$ és $\left(a-\frac{ab}{a-b}\right):\left(\frac{ab}{a-b}-b\right)-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\left(2-\frac{b}{a}\right)=-6$. Számítsd ki a $\frac{3a-2b}{a+b}$ kifejezés értékét!

35. (E) Bizonyítsd be, hogy a $\frac{80a}{4a-10}:\left(\frac{2a+5}{2a-5}-\frac{2a-5}{2a+5}\right)$ kifejezés értke minden egész a esetén páratlan szám!

36. (E) Tudjuk, hogy $a+b=5$ és $ab=-3$. Számítsd ki az a^2+b^2 értékét!

37. (E) Tudjuk, hogy $a-b=2$ és $ab=7$. Számítsd ki az a^3-b^3 értékét!

38. (E) Számítsd ki a következő kifejezés értékét, ha $a+b=1$!

$$a^3+b^3+3\cdot(a^3b+ab^3)+6\cdot(a^3b^2+a^2b^3)$$

39. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $x + y + z = 0$, akkor $x^3 + x^2z - xyz + y^2z + y^3 = 0$!

40. (E) Mennyi lehet az $x + \frac{1}{x}$ értéke, ha $x - \frac{1}{x} = 1$?

41. (K) Írd fel két polinom hányadosaként a következő kifejezést!

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - d \qquad (a; b; c \neq 0)$$

42. (E) A parciális törtekre bontás segítségével határozd meg a $\frac{13x-8}{(x-2)\cdot(7x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{7x+4}$ kifejezésben az A és B értékét!

43. (E) Határozd meg a és b értékét, ha tudjuk, hogy minden $x \neq \frac{1}{2}; x \neq 3$ esetén teljesül az $\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+3}$ összefüggés!

44. (E) Számítsd ki a $7x^6 + 3x^5 - x^4 + 5x^2 + 2x - 1$ polinom $x = -2$ helyettesítési értékét a Horner – elrendezés segítségével!

45. (E) Mennyi az együtthatók összege az $\left(7x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2\right)^{2017}$ kifejezés polinom alakjában?

46. (E) Végezd el a következő polinom osztásokat!

a) $(x^8 + x^4 + 1) : (x^2 + x + 1)$

b) $(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 6) : (x + 2)$

47. (E) Egyszerűsítsd a következő törtet a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{x^2 - y^2}$$

48. (K) Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igaz vagy hamis!

A: Bármely két irracionális szám között van racionális szám.

B: Bármely két racionális szám között van irracionális szám.

C: Van legkisebb pozitív irracionális szám.

D: Van legnagyobb racionális szám.

E: Két irracionális szám összege lehet racionális.

F: Két irracionális szám szorzata lehet racionális.

G: Két irracionális szám különbsége lehet racionális.

H: Egy racionális és egy irracionális szám összege racionális.

I: Egy racionális (nem 0) és egy irracionális szám szorzata irracionális.

J: Egy irracionális és egy (nem 0) racionális szám hányadosa irracionális.

K: Lehet egy racionális és egy irracionális szám különbsége racionális.

49. (K) Egy farmer lovat vásárolt 60 dollárért és eladta a szomszédjának 70 – ért. Később rájött, hogy jobb üzletet is csinálhatott volna, ezért kölcsönkért a feleségétől 10 dollárt, visszavásárolta a lovat a szomszédtól 80 dollárért, és eladta a másik szomszédjának 90 – ért. Mennyit keresett az üzleten?

50. (K) Egy szállodában három barát kibérelt 30 dollárért egy lakosztályt, s fejenként $10 - 10$ dollárt adtak a szolgának. Mikor azonban a szolga átadta az összeget a tulajdonosnak, az rájött, hogy a lakosztály csak 25 dollár, s így visszaküldött 5 darab egydollárost. A szolga felfele menet azon gondolkodott, hogy nem tudja szétosztani az 5 darab érmét a három utazó között, így 2 - t zsebre tett, az embereknek pedig visszaadott fejenként $1 - 1$ dollárt. Így végül mindenki 9 dollárt fizetett, ami $3 \cdot 9 = 27$ dollár, illetve 2 dollár maradt a zsebben, s ez összesen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ dollár. Hova tűnt a harmincadik dollár?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2001.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(9) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $9-10.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Katona Renáta; 2007; Logikai egypercesek; Hungária könyv – és társasjáték kiadó; Budapest

(11) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(12) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(13) Saját anyagok