Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 0; 1; 2$ .... Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Azonos alapú hatványok szorzata megegyezik azzal a hatvánnyal, amelynél a közös alapot a kitevők összegére emeljük. Jelöléssel: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ $(x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

Bizonyítás:

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m\ db} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\ db} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x \cdot x}_{m+n\ db} = x^{m+n}$$

■

TÉTEL:
Azonos alapú hatványok osztása megegyezik azzal a hatvánnyal, amelynél a közös alapot a számláló és a nevező kitevőjének különbségére emeljük.
Jelöléssel: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

Bizonyítás:

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m\ db}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\ db}} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m-n\ db}}{1} = x^{m-n}$$

■

TÉTEL:
Hatvány hatványa megegyezik azzal a hatvánnyal, amelynél az alapot a kitevők szorzatára emeljük. Jelöléssel: $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ $(x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

Bizonyítás:

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot \ldots \cdot x^m}_{n\ db} = x^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\ db}} = x^{m \cdot n}$$

■

TÉTEL:
Szorzat hatványa megegyezik a tényezők hatványának szorzatával.
Jelöléssel: $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ $(x, y \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}^+)$.

Bizonyítás:

$$(x \cdot y)^n = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \ldots \cdot (x \cdot y)}_{n\ db} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\ db} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n\ db} = x^n \cdot y^n$$

■

TÉTEL:
Tört hatványa megegyezik a számláló és a nevező hatványának hányadosával.
Jelöléssel: $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} (x, y \in \mathbb{R}; y \neq 0; m, n \in \mathbb{Z}^+)$.

<u>Bizonyítás:</u>

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x}{y}\right)}_{n\ db} = \frac{\overbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}^{n\ db}}{\underbrace{y\cdot y\cdot\ldots\cdot y}_{n\ db}} = \frac{x^n}{y^n}$$

■

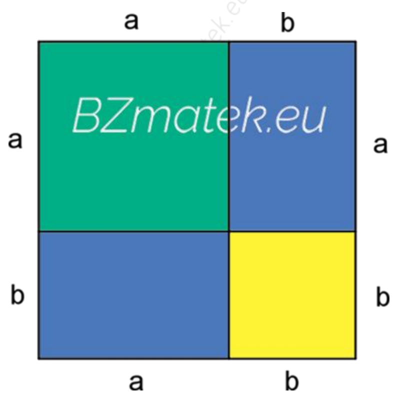
TÉTEL:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

<u>Bizonyítás:</u>

Tekintsük az első azonosságot:

Az $(a+b)$ oldalú négyzetet bontsuk fel az oldalaival párhuzamos egyenesekkel az ábra szerint:

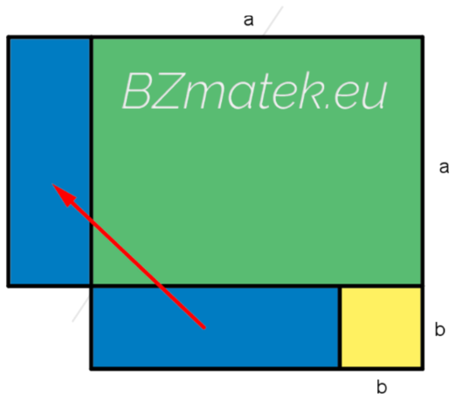


Az így keletkezett két – két négyzet, illetve téglalap területének összege megegyezik az eredeti négyzet területével: $T = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

■

Tekintsük a második azonosságot:

Az a oldalú négyzetből vegyük el a b oldalú négyzetet, majd a fennmaradó $(a-b)$ és b oldalakkal rendelkező (kék) téglalapot helyezzük át az ábra szerint:



Az így keletkező nagyobb téglalap (az áthelyezett kék és a zöld összessége) területe megegyezik a nagy négyzet és a kis négyzet különbségének területével: $T = a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$.

■

Tekintsük a harmadik azonosságot:

Végezzük el a hatványozás műveletét, majd vonjuk össze a megfelelő tagokat:

$$(a-b)^3 = (a-b) \cdot (a-b)^2 = (a-b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 - 2a^2b + a^2b^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

■