A póker matematikája

Mostanában egyre közkedveltebb kártyajáték lett a **(Holdem) Poker**, melynek az is oka lehet, hogy a televízióban megjelent a nagyobb versenyek közvetítése. Mint minden kártyajátékban, itt is lényeges a szerencse faktor, illetve az is, hogy minek mennyi lehet a valószínűsége. A következőekben a lehetséges kimenetelek esélyeit szeretném bemutatni, részletes (és remélhetőleg könnyen követhető) számítással alátámasztani.

Először a szabályokról ejtenék néhány szót. A játékot 52 lapos francia kártyával játszák, mely 4 színből **(Treff, Pikk, Kör, Káró)**, s minden szín 13 figurából **(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A)** áll. Az Ász a játék során egyesként is szerepelhet! Egy adott körben minden játékos kézhez kap 2 lapot (melyet csak ő lát), majd ezután mindenkinek lehetősége van „megszólalni" (dobni a lapot/ tartani a tétet / emelni a tétet). Miután a megadások megtörténtek, az osztó lehelyez egy lapot az asztalra („éget" : a lapot nem látják a játékosok) lefordítva, majd pedig három lapot felfordítva (FLOP). Ezután ismét egy licitkör (megszólalás) következik. A megadások után szintén éget az osztó, majd egy lapot helyez a korábbi három mellé (TURN). Ezt követően ismét licitek következnek. Miután a hívásokat megadták, újfent éget az osztó, végezetül lehelyezi az utolsó közös lapot is az asztalra a korábbi négy mellé (RIVER). Ezt követően még van egy lehetőség a játékosoknak a hívásra, majd pedig megmutatják lapjaikat és a legjobb „kézzel" rendelkező versenyző viszi a kasszát (döntetlen esetén osztoznak). A játékosnak a 2 saját és az 5 közös lapból kell a legmagasabb kombinációt **(5 lapot)** kell kiválasztania a mutatáshoz.

A következő, amit át kell tekintenünk, az a lehetséges lap kombinációk a játék során. Ezek sorrendben: **1. Royal Flush** (egy színből a legmagasabb sor, pl.: körből 10. J, Q, K, A); **2. Straight Flush** (egy színből nem a legmagasabb sor, pl.: káróból 3, 4, 5, 6, 7); **3. Poker** (négy egyforma figura, pl.: káró 9, kör 9, pikk 9, treff 9); **4. Full House** (három egyforma és két egyforma, pl.: kör 8, treff 8, káró 8, pikk 3, treff 3); **5. Flush** (öt lap egy színből, pl.: treffből 2, 4, 7, J, K); **6. Straight** (különböző színű lapokból sor, pl.: treff A, kör 2, kör 3, pikk 4, káró 5); **7. Drill** (három egyforma figura, pl.: kör 4, treff 4, pikk 4); **8. Két pár** (két-két egyforma lap, pl.: kör 10, treff 10, kör K, káró K); **9. Egy pár** (két egyforma figura, pl.: kör 6, káró 6); **10. Magas lap** (öt olyan lap, melyekből a fentiek egyike sem rakható ki, pl.: káró 3, káró 5, treff 6, pikk 10, pikk Q). Amennyiben két játékosnál azonos a kombináció, úgy a magasabb lappal rendelkező versenyző nyeri a kört. Full House esetében az nyer, akinek a három egyforma lapja magasabb.

Még mielőtt belekezdenénk a számolgatásokba, talán célszerű röviden leírni, miket is fogunk alkalmazni a valószínűségek kiszámításához. Az első amit meg kell említeni, hogy a **valószínűséget** általánosan a következő képlettel adjuk meg: $\frac{\boldsymbol{kedvező\ eset}}{\boldsymbol{összes\ eset}}$. Tehát minden esetben két értéket kell számolnunk majd. Az egyes esetek kiszámításához pedig a következőeket kell tudnunk:

- **Ismétlés nélküli permutáció:** *n* darab elem sorba rendezése, az elemek között nincs egyforma **(képlet: n! = 1 * 2 * 3 * … * n)**

- **Ismétlés nélküli kombináció:** *n* darab, különböző elem közül választunk ki *k* darabot úgy, hogy a kiválasztás során nincs ismétlődő elem és nem fontos az elemek sorrendje $\left(\mathbf{képlet}: \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!*(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}\right)$

- **Ismétlés nélküli variáció:** *n* darab, különböző elem közül választunk ki *k* darabot úgy, hogy a kiválasztás során nincs ismétlődő elem és számít az elemek sorrendje $\left(\mathbf{képlet}: \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}\right)$

- **Ismétléses variáció:** *n* darab, különböző elem közül választunk ki *k* darabot úgy, hogy a kiválasztás során lehet ismétlődő elem és számít az elemek sorrendje is $\left(\boldsymbol{képlet}: \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}\right)$

Mindezen bevezető után hozzá is kezdhetünk kiszámítani az egyes lapkombinációk előfordulásának esélyeit. Amennyiben átgondoljuk a feladatot, láthatjuk, hogy a valószínűség kiszámításához fentebb megadott képletben szereplő **összes eset** mindenhol azonos lesz, még pedig a következő kérdésre adott válasz: Hány féleképpen vehetek ki 5 lapot az 52 lapos pakliból, ha nem teszek vissza egyet sem a húzás során? (A látott hét lapból elegendő a végén használt 5 lapot tekinteni.) Ehhez a kombináció képletét kell alkalmaznunk: $\binom{\mathbf{52}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{52!}}{\mathbf{5!*47!}}$. Az összes eset tehát: **2 598 960**.

Tekintsük ezek után elsőként a **Royal Flush**-t. A kedvező esetek száma itt egyszerűen adódik, hiszen minden szín esetén csak egy ilyen lapkombináció lehetséges, tehát összesen 4. Ennek a valószínűsége így: $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2598960}}$ **= 0,000001539**.

A következő a sorban a **Straight Flush (színsor)**. Itt is elegendő belegondolni abba, hogy színenként, 14 lapból (az Ász lehet 1-es is!), mennyi 5 lapból álló sort tudunk képezni? Mivel színenként 10-et így összesen 40-et, azonban ebből ki kell vonnunk a korábban már kiszámolt Royal Flush-ök számát. Így a Straight Flush valószínűsége: $\frac{36}{2598960}$ **= 0,00001385**.

Jöjjön most a **Poker**. Ehhez elsőként a következőt kell megválaszolnunk: Hány féleképpen tudunk kiválasztani a 13 figurából 1-et? Itt szintén a kombináció képletét használjuk (bár ez fejben is kiszámítható): $\binom{13}{1}$ = $\frac{13!}{1!*12!}$ = 13. Azonban ha a 4 azonos lapot kivesszük a pakliból, utána még az ötödik lapot is ki kell húznunk. Ehhez ismét a fent alkalmazott képletet használhatjuk: $\binom{48}{1}$ = 48. Végezetül, mivel ezek az események egymástól függnek, ezért össze kell őket szorozni, így a végeredményünk: 13 * 48 = 624. Így a Poker előfordulásának esélye a következő: $\frac{624}{2598960}$ **= 0,00024**.

A következő lehetőség a **Full House**. Itt a következőképpen okoskodhatunk. A 13 figurából kiválasztunk egyet és ha ebből kell 3 darab, akkor azt a 4 színből $\binom{4}{3}$ = 4-féleképpen választhatjuk ki. A másik kettő azonos lap esetében hasonlóan gondolkodhatunk: A maradék 12 lapból kiválasztunk egyet, s a 4 színből $\binom{4}{2}$= 6-féleképpen tehetjük ezt meg. Így a kapott eredmény: 13 * 4 * 12 * 6 = 3744. Tehát a Full House valószínűsége: $\frac{3744}{2598960}$ **= 0,00144**.

Az ötödik lapkombináció a **Flush (szín)**. Ehhez elsőként a következőt kell megválaszolni: Mennyi féleképpen választhatunk ki a 13 lapból 5-öt (a sorrend természetesen itt sem számít)? Ezt a fentiekből tudjuk, hogy $\binom{13}{5}$ = $\frac{13!}{5!*8!}$ = 1287-féleképpen tehetem meg. A kapott értéket a lehetséges 4 szín miatt meg kell szoroznunk 4-gyel, majd pedig ki kell vonnunk a korábban kiszámolt Royal- és Straight Flush-ök számát. Így végül 5108-at kapunk. A Flush előfordulásának esélye tehát: $\frac{5108}{2598960}$ **= 0,0019654**.

A következő elem a **Straight (sor)**. Ezen számítás során egy újabb képletet is alkalmazni fogunk. A 13 figurából 10 (öt elemből álló) sor képezhető (az Ász 1-gyes is lehet!). Már csak az a kérdés, hogy mivel itt a színek bármilyenek lehetnek, mennyi féleképpen választhatok ki a 4 színből 5-öt? Mivel itt a színek megválasztásának sorrendje lényeges és a színek ismétlődhetnek, ezért az ismétléses variáció képletét kell alkalmaznunk. Így tehát 10 * 4^5 = 10240-féleképpen jöhet ki sor, azonban itt is ki kell vonni a két legnagyobb lapkombinációnak a számát, azaz 40-et. Ezáltal a Straight valószínűsége a következő lesz: $\frac{10200}{2598960}$ **= 0,0039246**.

A hetedik a sorban a **Drill**. Ehhez a következőképpen kezdhetünk neki. A 13 lapból kiválasztunk 1-et, s a 4 szín esetén ebből a figurából 3-at $\binom{4}{3}$ = 4-féleképpen választhatunk ki. A maradék 12 lapból még ki kell választanunk további kettőt, melyet $\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!*10!}$ = 66-féleképpen tehetünk meg, s ezekhez is rendelnünk kell egy-egy színt. Itt a színek megválasztásának sorrendje fontos, tehát ez 4^2 = 16-féleképpen lehetséges. Végül ezeket összeszorozva kapjuk, hogy a kedvező esetek száma: 13 * 4 * 66 * 16 = 54 912. Így a Drill valószínűsége: $\frac{\mathbf{54912}}{\mathbf{2598960}}$ = **0,0211**.

A következő lehetőség a **Két Pár**. Itt elsőként kiválasztunk a 13 lapból 2-t, majd mindegyikhez rendelünk 2-2 színt (a színek megválasztásának sorrendje itt nem fontos, mert a 2-2 figura azonos értékű). A fentiek alapján tehát: $\binom{13}{2} * \binom{4}{2} * \binom{4}{2}$ = 78 * 6 *6 = 2808. Az ötödik lapot pedig a maradék 11 lapból kell kiválasztanunk, s ehhez is rendelni kell egy színt a 4-ből. Így a végeredmény: 2808 * 11 * 4 = 123 552. Tehát a Két Pár előfordulásának esélye a következő: $\frac{\mathbf{123552}}{\mathbf{2598960}}$ = **0,0475.**

Az utolsó előtti lapkombináció az Egy Pár. Itt először kiválasztunk 1 figurát a 13-ból, majd ehhez rendelünk 2 színt, így kapjuk meg az egy darab párunkat. Ezt a következőképpen számolhatjuk ki: $\binom{13}{1} * \binom{4}{2}$ = 13 * 6 = 78. A maradék 12 lapból pedig ki kell választani 3-at és mindegyikhez 1-1 színt is kell rendelni, azonban a színek megválasztásának sorrendje itt lényeges. Tehát a számolás menete: $\binom{12}{3} * 4^3$ = 220 * 64 = 14 080. Végezetül a két számítás eredményét kell még összeszorozni: 14 080 * 78 = 1 098 240. Így annak az esélye, hogy végül legyen Egy Párunk a következő: $\frac{\mathbf{1098240}}{\mathbf{2598960}}$ = **0,42.**

Végül még ki kell számítani a **Magas Lapnak** a valószínűségét is. Itt a számítás szintén nem igényel nagy nehézséget, csupán oda kell majd figyelni a már korábban megkapott és most kivonandó egységekre. Tehát a 13 lapból kiválasztunk 5-öt, majd ezekhez 1-1 színt is rendelünk. Mivel a színek megválasztásának sorrendje itt is lényeges, ezért mindezt $\binom{13}{5} * 4^5 = \frac{13!}{5!*8!} * 4^5$ = 1287 * 1024 = 1 317 888-féleképpen tehetjük meg. Azonban ezekből még le kell vonni a következőket: a Royal Flush-t, a Straight Flush-t, a Flush-t és a Straight-t. Így végül kapjuk, hogy 1 317 888 – 4 – 36 – 5 108 – 10 200 = 1 302 540. Tehát annak az esélye, hogy ne alakuljon semmi az 5 lapból: $\frac{\mathbf{1302540}}{\mathbf{2598960}}$ = **0,501**.

Miután mindent kiszámoltunk, látható a számokból, hogy miért pont így jönnek sorrendben a lapkombinációk értékei, még ha azt első ránézésre néha kicsit másképp is gondolnánk. Egyesek azt szokták mondani, hogy annak az esélye, hogy Royal Flush-t kapjunk egy élet is kevés. Pedig, ha összevetjük mondjuk azzal, hogy mennyi az **Ötös Lottón** az esélyünk, ahhoz hogy elvigyük a főnyereményt $\left(\frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43949268} = \mathbf{0{,}00000002275}\right)$, látható melyikre kellene többet várnunk.

Outok kiszámítása

Outoknak azokat a kártyákat nevezzük, amelyekkel véleményünk szerint nyerő lapunk lesz. Az outokkal való számítás egyfajta becslés. Az esélyünk kiszámításához az „out" és „nem out" lapok egymáshoz viszonyított arányát kell meghatároznunk. A „nem out" lapok számát úgy kaphatjuk meg, hogy az összes ismeretlen lapok számából kivonjuk a gondolt outjaink számát. Amennyiben turn-ön járunk, azaz csak egy „utca" van hátra, akkor egyszerű dolgunk van: az 52 lapos pakliból 6 lapot ismerünk (4-et asztalról, 2-t kezünkből), 46-ot nem. Ekkor a **nyerési odds** = $\frac{\boldsymbol{outok\ száma}}{\mathbf{46}-\boldsymbol{outok\ száma}}$. Tekintsünk egy példát: színhúzóval (1 lap kell ahhoz, hogy Flush-ünk legyen) az outjaink száma 9, mert 13 színkártyából 2 a kezünkben van, 2 pedig az asztalon. Turn-ön a nyerési oddszunk így 9 : (46 - 9) = 1 : 4,1 lesz. Míg ez egy arányszám, addig ugyanez százalékosan számítva: $\frac{9}{46}$ = 20,45%.

Amennyiben nem a turn-nél, hanem még flop-on járunk, akkor bonyolultabb a helyzet. A fenti eljárással (az ismeretlen kártyák száma 47-re módosul), csak azt az esélyt tudjuk megbecsülni, amivel turn-re javulunk. A turn - river együttes becslése nehezebb. Annak az esélye, hogy a két utca egyikén megjön valamelyik outunk, a következővel lesz egyenlő: a 100%-ból ki kell vonni annak az esélyét, amikor egyik utcán sem javulunk. Képlettel leírva: **P (valamelyik utcán javulunk) = 1** – $\frac{\mathbf{47}-\boldsymbol{outok\ száma}}{\mathbf{47}} * \frac{\mathbf{46}-\boldsymbol{outok\ száma}}{\mathbf{46}}$. Előző példát tekintve: 1 - $\frac{38}{47}$ * $\frac{37}{46}$ = 1 - 0,65 = 35% lesz az esélye annak, hogy egy floppolt kilenc élő outos színhúzóval river-ig valahol Flush-re javulunk.

Van egy könnyebb számolási mód is, mellyel közelítő értéket lehet meghatározni: A következő utcán való javulásnak az esélyét úgy számolhatjuk ki, hogy megszorozzuk az outok számát kettővel, és ez lesz a százalék! Azonban ha a turn - river együttes javulási esélyét tekintjük, akkor meg kell szorozni az outokat néggyel, majd az eredményből ki kell vonni a 8 fölötti outok számát! A fenti példát alapul véve: 9 outnál ez egy utcára 18%-os javulást mutat, két utcára 9 * 4 – (9 - 8) = 35%-ot. A második mutató 14 outra: 14 * 4 – (14 - 8) = 50%. Érdemes megjegyezni tehát, hogy ebben az esetben a 14 out jelenti az 50 - 50%-os esélyt!

Néhány kezdő lap érdekes megnevezése

- **A-A** - American Airlines vagy Pocket Rockets
- **A-K** – Big Slick vagy Anna Kournikova ("jól néz ki, de ritkán nyer")
- **A-Q** – Big Chick (nagylány)
- **K-K** – Cowboys vagy King Kong
- **K-Q** – Marriage (házasság)
- **Q-Q** – Ladies (dámák)
- **J-J** – Hooks (horgok, kampók)
- **10-2** – Doyle Brunson (legendás amerikai pókerjátékos, aki ezekkel a lapokkal kétszer nyerte meg a WSOP-t)
- **9-2** – Montana Banana (Montana a legészakibb része az USA-nak, így ott képtelenség banánt termelni. Az esély a nyerésre ezekkel a lapokkal annyi, mint, hogy Montanában banán terem.)
- **8-8** – Snowman (hóember) vagy Two Fat Ladies (két kövér hölgy)
- **7-7** – Hockey Sticks (hokiütők)
- **6-9** –The Big Lover (egy szeretkezési pózra utal)
- **4-5** – Colt 45 vagy Jesse James (a híres banditát ezzel a fegyverrel ölték meg)
- **3-3** – Crabs (rákok)
- **2-2** – Ducks (kacsák)

Brósch Zoltán